

Conice. Definitii ca locuri geometrice.

O conică este o curbă care se obține din intersecția unui plan cu un con circular drept.

Forma acestei curbe poate să difere destul de mult în funcție de poziția planului față de axa conului, deci este vorba de o familie de curbe, numite conice. Ele au fost studiate din Antichitate. O conică poate fi:

1. Elipsa / ceroul
2. Hiperbola
3. Parabola

Considerăm planul afîn euclidian $(E_2, \mathcal{V}_2, \phi)$.

Definiție. Se consideră 2 puncte distincte $F, F' \in E_2$ cu $d(F, F') = 2c$, $c > 0$, și un nr. real $a \geq c$. S.m. elipsa locul geometric al punctelor planului E_2 pentru care suma distanțelor la punctele fixe F, F' este constantă și egală cu $2a$.

$$E = \{P \in E_2 \mid d(P, F) + d(P, F') = 2a\}.$$

Punctele F, F' s.m. Locurile elipsei, dr. FF' axa Locală și $2c$ distanța Locală

Pentru a ne convinge că locul geometric definit anterior este o mulțime nevidă, fie O mij. lui (FF') , $A, A' \in FF'$ a.i.

$$d(O, A) = d(O, A') = a \text{ și } A' - F' - O - F - A$$

Evident,

$$\begin{aligned} A, A' \in E. : & \begin{cases} d(A, F) + d(A, F') = (a - c) + (a + c) = 2a \\ d(A', F) + d(A', F') = (a + c) + (a - c) = 2a \end{cases} \end{aligned}$$

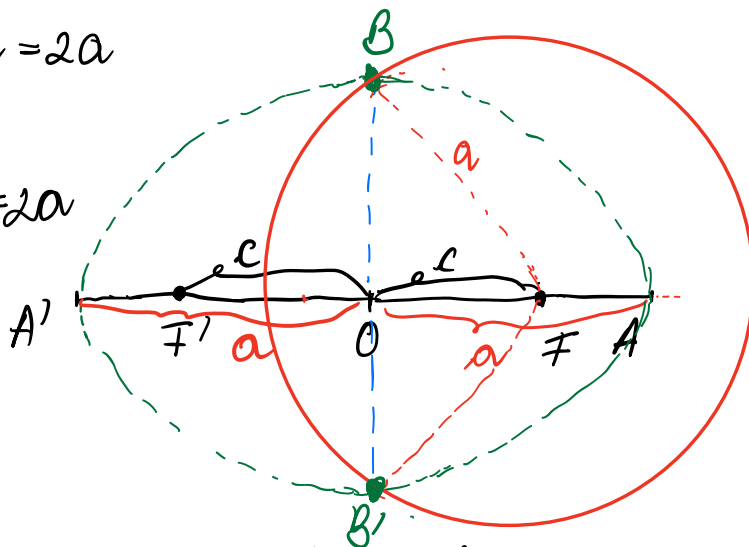
Putem să mai construim ușor alte două puncte ce aparțin elipsei: fie $\{B, B'\}$ intersecția mediatoarei lui (FF') cu cercul construit în F și raza a . Evident $B, B' \in E$.

$$d(B, F) + d(B, F') = a + a = 2a$$

($\triangle BFF'$ - isoscel)

$$d(B', F) + d(B', F') = a + a = 2a$$

($\triangle B'FF'$ - isoscel)



Aste patru puncte A, A', B, B' s.m. vârfurile elipsei.
 FF' s.m. axa transversă, iar mediatoarea seg. (FF')
 s.m. axa conjugată.

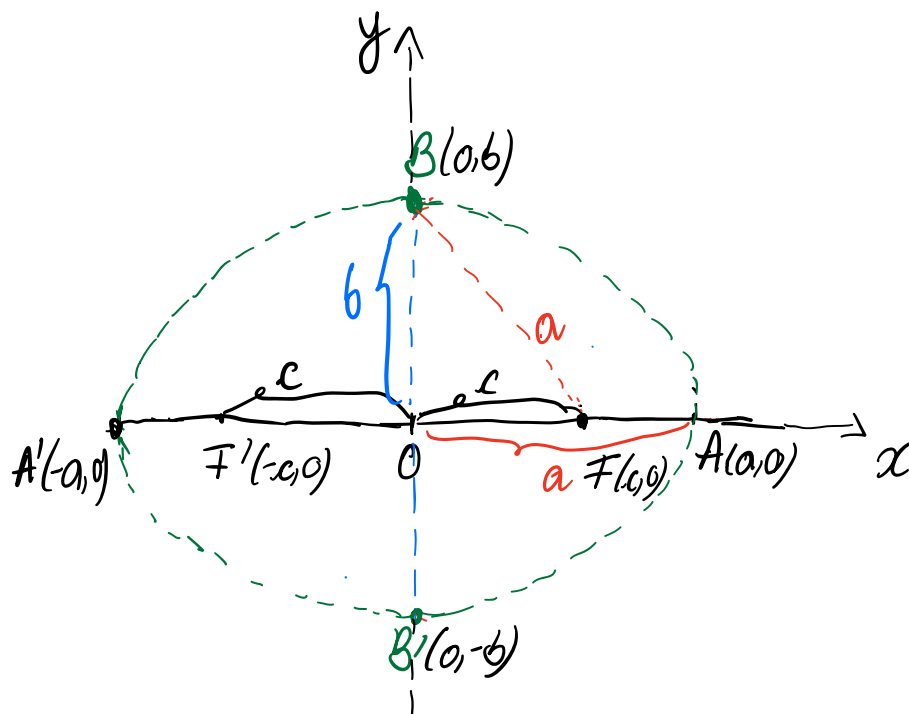
Ecuațiile elipsei

Pentru a det. ecuațiile elipsei vom fixa un reper ortonormat astfel: originea va fi punctul O care este mijlocul seg. (FF') , $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ bază ortonormată pozitivă a.î.

$$\bar{i} = \frac{\overrightarrow{F'F}}{|\overrightarrow{F'F}|}, \quad \bar{j} \perp \bar{i}, \quad |\bar{j}| = 1$$

Notăm cu Ox, Oy axele de coordonate.

Reperul $R = \{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ considerat mai sus se numește reper canonic



În raport cu acest reper avem:

$A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$, $B(0, b)$, $B'(0, -b)$

unde $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, $a > c$

Numim a semi-axa mare și b semi-axa mică

Fie $P(x, y) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow d(P, F) + d(P, F') = 2a$

$$\Leftrightarrow |PF| + |PF'| = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(c-x)^2 + (0-y)^2} + \sqrt{(-c-x)^2 + (0-y)^2} = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y^2 + (x-c)^2} + \sqrt{y^2 + (x+c)^2} = 2a \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y^2 + (x-c)^2} = 2a - \sqrt{y^2 + (x+c)^2} \quad |^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 + (x-c)^2 = 4a^2 + y^2 + (x+c)^2 - 4a\sqrt{y^2 + (x+c)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4a\sqrt{y^2 + (x+c)^2} = 4a^2 + y^2 + x^2 + 2xc + c^2 - y^2 - x^2 + 2xc - c^2 \quad / : 4$$

$$\Leftrightarrow \underline{a\sqrt{y^2 + (x+c)^2} = xc + a^2} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow a^2(y^2 + (x+c)^2) = x^2c^2 + a^4 + 2xca^2$$

$$\Leftrightarrow a^2y^2 + a^2x^2 + a^2c^2 + 2xca^2 = x^2c^2 + a^4 + 2xca^2$$

$$\Leftrightarrow a^2y^2 + a^2c^2 + a^2x^2 - c^2x^2 - a^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2y^2 + a^2c^2 + x^2(\underbrace{a^2 - c^2}_{=b^2}) - a^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2y^2 + a^2c^2 + b^2x^2 - a^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2y^2 + b^2x^2 - a^2(\underbrace{a^2 - c^2}_{=b^2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0 \quad / : (a^2b^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

(**)

Observații: 1) Din (**) avem $|x| \leq a, |y| \leq b$.

2) Din (*) avem:

$$\begin{cases} 2a \geq \sqrt{y^2 + (x+c)^2} \\ 2a \geq \sqrt{y^2 + (x-c)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 \geq y^2 + (x+c)^2 \\ 4a^2 \geq y^2 + (x-c)^2 \end{cases}$$

Cum $|x| \leq a, |y| \leq b \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \underbrace{y^2 + (x \pm c)^2} &\leq b^2 + (a+c)^2 = a^2 - c^2 + (a+c)^2 \\ &= 2a^2 + 2ac \\ &\leq 2a^2 + 2a^2 = \underline{4a^2} \quad (\text{adun.}) \\ &\quad \begin{matrix} \uparrow \\ c \leq a \end{matrix} \end{aligned}$$

$$f(x) = (x+c)^2, \quad x \in [-a, a]$$

$$f'(x) = 2(x+c), \quad f''(x) = 2 > 0$$

$$\begin{cases} f'(x) < 0, \quad \forall x \in (-a, -c) \Rightarrow f \text{ descresc. pe } (-a, -c) \\ f'(x) = 0, \quad x = -c \\ f'(x) > 0, \quad \forall x \in (-c, a] \Rightarrow f \text{ cresc. pe } (-c, a) \end{cases}$$

x	$-a$	$-c$	0	a
f'	-	-	0	+
f''	+	+	+	+
f	$(a+c)^2 \searrow$	0	$\nearrow$	$(a+c)^2$

Deci $f(x) \leq (a+c)^2, \forall x \in [-a, a]$

$$g(x) = (x-c)^2, \quad x \in [-a, a]$$

$$g'(x) = 2(x-c), \quad g''(x) = 2 > 0$$

$$\begin{cases} g'(x) < 0, \quad \forall x \in (-a, c) \Rightarrow g \text{ descresc. pe } (-a, c) \\ g'(x) = 0, \quad x = c \\ g'(x) > 0, \quad \forall x \in (c, a] \Rightarrow g \text{ cresc. pe } (c, a) \end{cases}$$

x	$-a$		c			a
g'	-	-	0	+	+	+
g''	+	+	+	+	+	+
	$(a+c)^2 \searrow$		0	$\nearrow$	$\nearrow$	$(a-c)^2$

$$\text{Deci } \underline{g(x) \leq (a+c)^2, \quad \forall x \in [-a, a]}$$

Reciproc, dacă considerăm $P(x, y)$ a.î. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, vrem să

arătăm că $P \in E$, adică $\underline{d(P, F) + d(P, F') = 2a}$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \Leftrightarrow y^2 = \frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2} \quad \Rightarrow$$

$$d(P, F) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$d(P, F') = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

-C7-

$$d(P, F) + d(P, F') =$$

$$= \sqrt{(x-c)^2 + \frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}} + \sqrt{(x+c)^2 + \frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(x^2 - 2cx + c^2)a^2 + a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}} + \sqrt{\frac{(x^2 + 2cx + c^2)a^2 + a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a^2 - b^2)x^2 - 2ca^2x + a^2c^2 + a^2b^2}{a^2}} + \sqrt{\frac{(a^2 - b^2)x^2 + 2ca^2x + a^2c^2 + a^2b^2}{a^2}}$$

$$\stackrel{c^2 = a^2 - b^2}{=} \sqrt{\frac{c^2 x^2 - 2ca^2x + a^4 - a^2b^2 + a^2b^2}{a^2}} + \sqrt{\frac{c^2 x^2 + 2ca^2x + a^4 - a^2b^2 + a^2b^2}{a^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(cx - a^2)^2}{a^2}} + \sqrt{\frac{(cx + a^2)^2}{a^2}} = \frac{|cx - a^2| + |cx + a^2|}{a}$$

$$= \frac{a^2 - cx + cx + a^2}{a}$$

$$= \underline{\underline{2a}}.$$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} x \leq a \\ c > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} cx \leq ca \\ c \leq a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{cx \leq a^2}}$$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} x \geq -a \\ c > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} cx \geq -ac \\ c \leq a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{cx \geq -a^2}}$$

Deci, ec. canonică a elipsei

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad \text{și } \mathcal{E} = \{P(x, y) / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$$

- Observatii.
- Dacă $Q(x, y) \in \mathcal{E}$, at. $Q_1(-x, y) \in \mathcal{E}$, deci Oy este axă de simetrie pt. elipsă
 - Dacă $Q(x, y) \in \mathcal{E}$, at. $Q_2(x, -y) \in \mathcal{E}$, deci Ox este axă de simetrie pt. elipsă
 - Dacă $Q(x, y) \in \mathcal{E}$, at. $Q_3(-x, -y) \in \mathcal{E}$, deci O este centru de simetrie pt. elipsă.

Definim interiorul elipsei prin:

$$\text{Int } \mathcal{E} = \{P(x, y) \in \mathcal{E}_2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\}$$

Definim exteriorul elipsei prin:

$$\text{Ext } \mathcal{E} = \{P(x, y) \in \mathcal{E}_2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1\}.$$

Din ec. canonică a elipsei: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, obs. că orice pct. $P(x, y) \in \mathcal{E}$ satisface $y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$

Deci $-a \leq x \leq a$, iar

$$y = \begin{cases} \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} & \text{pentru } y \geq 0 \\ -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} & \text{pentru } y < 0 \end{cases}$$

Acstea se numesc ecuații explicite pt. cele 2 arce de elipsă, cel inclus în semiplanul superior și cel inclus în semiplanul inferior.

Pentru a desena elipsa, este suficient să aflăm graficul funcției:

$$y(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad x \in [0, a]$$

$$\text{Graf } y = \{(x, y(x)) \mid x \in [0, a], y(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\}$$

$$y'(x) = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$y'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad y'(x) < 0, \quad \forall x \in (0, a)$$

$$y''(x) = -\frac{b}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot (-2x)}{a^2 - x^2}$$

$$y''(x) = -\frac{b}{a} \cdot \frac{a^2 - x^2 + x^2}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$$

$$y''(x) = -\frac{ba}{(a^2 - x^2)^{3/2}} < 0, \quad \forall x \in (0, a)$$

x	0					a
$y'(x)$	0	-	-	-	-	
$y''(x)$	-	-	-	-	-	
$y(x)$	b	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	0

(

-C10

① $\lim_{x \rightarrow 0} y'(x) = 0 = m \Rightarrow$ panta tangentei la graficul
funcției $x \mapsto y(x)$ în punctul
 $B(0, b)$

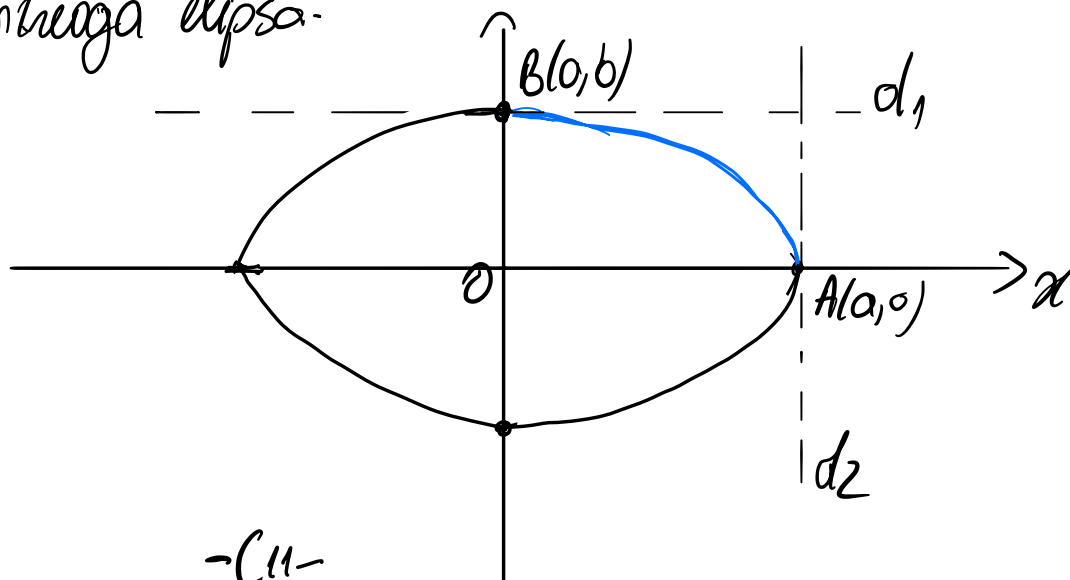
$\Rightarrow$ Tangenta la Graf y în $B(0, b)$ este
dr. ce trece prin punctul B și are panta 0.

$d_1: y - b = 0 \Rightarrow y = b.$

② $\lim_{x \rightarrow a} y'(x) = -\frac{b}{0} = -\infty \Rightarrow$ tangenta la Graf y
în $A(a, 0)$ este dr. ce trece prin A și
este verticală, deci paralelă cu Oy .

$d_2: x = a.$

Deoarece axele Ox și Oy sunt axe de simetrie și
 O este centru de simetrie putem acum desena
întreaga elipsă.



Ecuatiile parametrice

Ținând cont de ec. canonică a elipsei:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

este ușor de văzut că punctele $P(x, y)$ cu

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, t \in [-\pi, \pi]$$

sunt puncte de pe elipsă.

Ecuatiile $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, t \in [-\pi, \pi]$

s.m. ecuatiile parametrice ale elipsei

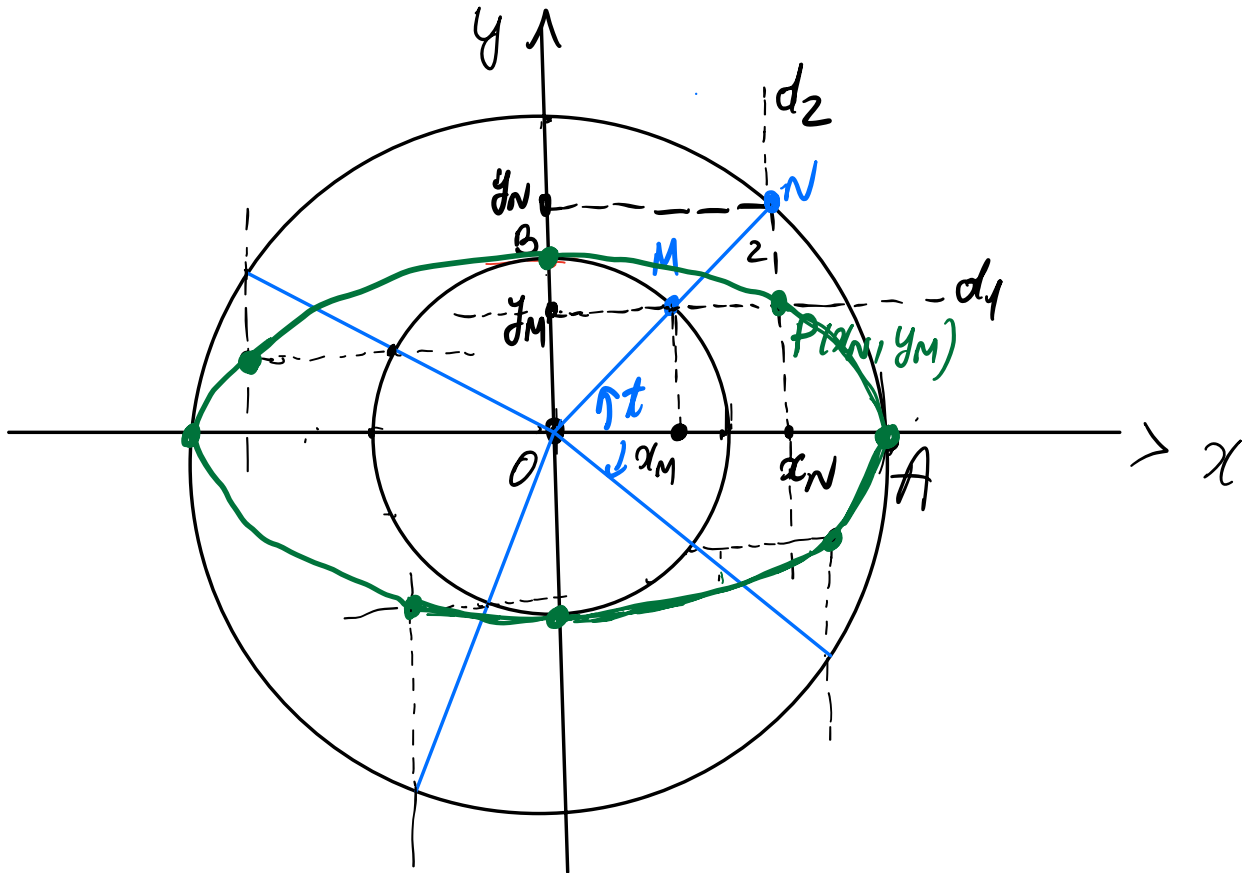
Pt. a înțelege semnificația parametrului t
facem urm. construcție:

- se consideră 2 cercuri concentrice, de raze $b < a$, cu centrul O .

- se consideră un reper ortonorm. $R = \{O; \vec{i}, \vec{j}\}$

ori, semi-axa Ox taie cerul de rază a în A

ori, semi-axa Oy taie cerul de rază b în B . - c12 -



- se consideră o semidirectrix mobilă cu originea în O care se rotește în jurul lui O . Poziția ei este dată de unghiul t pe care îl face cu semiaxa (Ox) . Ea taie cerul de roză în N și cerul de roză 6 în M .

- notăm paralela prin M la OA cu d_1
- notăm perpendiculara din N pe OA cu d_2 .

Fie $\{P\} = d_1 \cap d_2$. Căutăm $P(x_N, y_M)$.

Fie $t = \angle(\vec{x}, \vec{ON})_O \in (-\pi, \pi] \Rightarrow t = \angle(\vec{x}, \vec{OM})_O$

$$\cos t = \frac{\langle \vec{x}, \vec{ON} \rangle}{|\vec{x}| |\vec{ON}|} = \frac{x_N}{a} \Rightarrow \underline{x_N = a \cos t}$$

$$\vec{ON} = x_N \vec{i} + y_N \vec{j} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ \end{array}$$

$$|\vec{ON}| = a$$

$$\sin t = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_M \\ 0 & y_M \end{vmatrix}}{|\vec{x}| |\vec{ON}|} = \frac{y_M}{b} \Rightarrow \underline{y_M = b \sin t}$$

Deci, $P(a \cos t, b \sin t)$, adică $P \in E$.

Acesta este o metodă de construcție prin puncte a elipsei.

Directoarele elipsei

Revenind la ec. (1):

$$a \sqrt{y^2 + (x+c)^2} = xc + a^2,$$

o putem rescrie:

$$\sqrt{y^2 + (x+c)^2} = \frac{1}{a} (xc + a^2) \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + (x+c)^2} = \frac{c}{a} \left(x + \frac{a^2}{c} \right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow -a \leq x \leq a \Leftrightarrow -a + \frac{a^2}{c} \leq x + \frac{a^2}{c} \leq a + \frac{a^2}{c}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} 0 \leq \frac{a(a-c)}{c} \leq x + \frac{a^2}{c} \leq a + \frac{a^2}{c} \\ -c+1- \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y^2 + (x+c)^2} = \frac{c}{a} \left| x + \frac{a^2}{c} \right| \Leftrightarrow \frac{\sqrt{y^2 + (x+c)^2}}{\left| x + \frac{a^2}{c} \right|} = \frac{c}{a} \text{ (const)} \quad (2)$$

Dacă atunci când am obținut ecuația canonică a elipsei am fi păstrat în membrul din stânga celălalt radical, am fi obținut:

$$\sqrt{y^2 + (x-c)^2} = \frac{c}{a} \left| x - \frac{a^2}{c} \right| \Leftrightarrow \frac{\sqrt{y^2 + (x-c)^2}}{\left| x - \frac{a^2}{c} \right|} = \frac{c}{a} \text{ (const)} \quad (3)$$

Dreptele de ecuație $\delta: x = \frac{a^2}{c}; \delta': x = -\frac{a^2}{c}$ s.m.

directoarele elipsei.

Dacă considerăm $P(x, y) \in E$, cum $F(c, 0), F'(-c, 0)$ obținem:

$$\text{dist}(P, F) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\text{dist}(P, F') = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Obs. că

$$\text{dist}(P, \delta) = \frac{\left| x - \frac{a^2}{c} \right|}{\sqrt{1}} = \left| x - \frac{a^2}{c} \right|$$

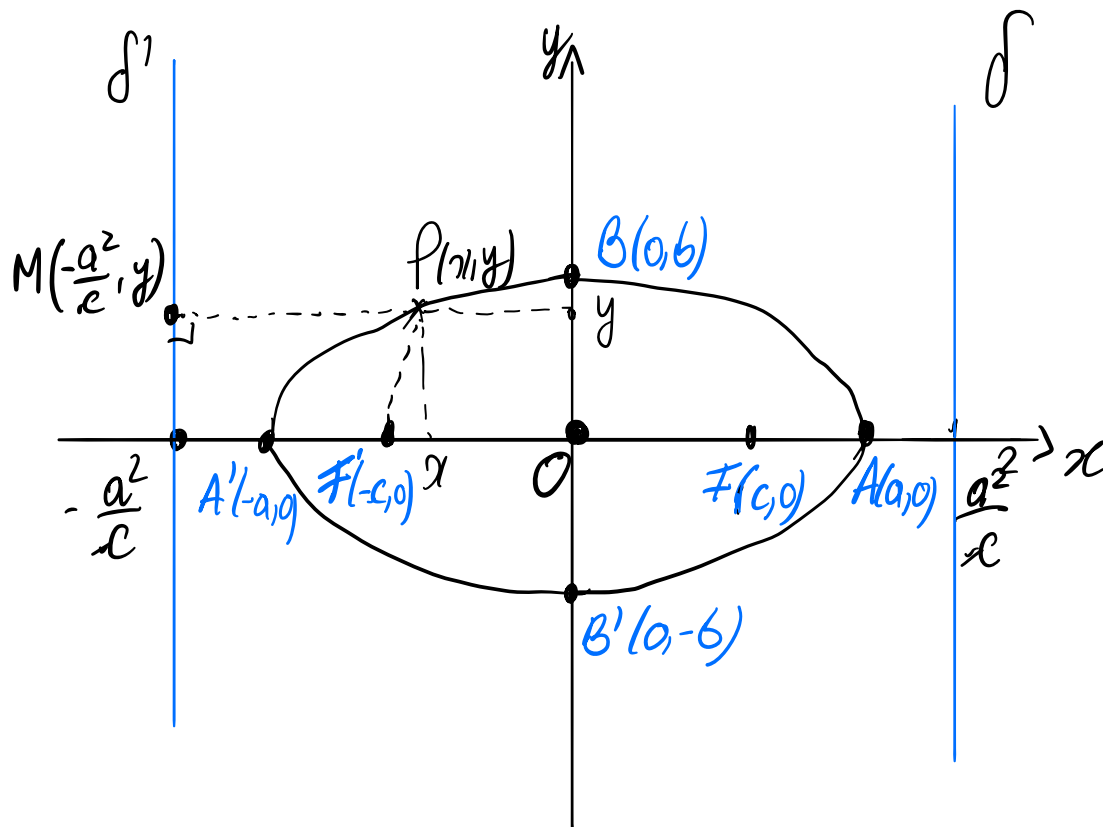
$$\text{dist}(P, \delta') = \left| x + \frac{a^2}{c} \right|$$

$$\Rightarrow \frac{\text{dist}(P, F)}{\text{dist}(P, \delta)} = \frac{\text{dist}(P, F')}{\text{dist}(P, \delta')} = \frac{c}{a}$$

(2) și (3)

$\Rightarrow$

Notăm $e = \frac{c}{a}$. Elor $e \in (0,1)$ și e s.m. excentricitatea elipsei.



Observație. Se poate demonstra și reciproca acestui rezultat: pentru $\forall e \in (0,1)$, mulțimea punctelor $P \in \mathbb{E}_2$ care satisfac

$$\frac{\text{dist}(P, F)}{\text{dist}(P, \delta)} = \frac{\text{dist}(P, F')}{\text{dist}(P, \delta')} = e,$$

unde F, F' sunt 2 puncte distincte și δ, δ' două drepte, formează elipsa cu focarele F și F' și directoarele δ și δ' .

Propoziție Fie E o elipsă și d o dreaptă. Atunci avem următoarele situații:

- i) $E \cap d = \{2 \text{ puncte}\}$; în acest caz d n.m. secantă elipsei
- ii) $E \cap d = \{1 \text{ punct (dublu)}\}$; în acest caz, d n.m. tangenta elipsei.
- iii) $E \cap d = \emptyset$ (puncte imaginare); în acest caz, d n.m. exterioară elipsei.

Demonstrație:

① Dacă $d \parallel Oy \Leftrightarrow d: x = \alpha$

$$d \cap E: \begin{cases} x = \alpha \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{\alpha^2}{a^2} \Leftrightarrow y^2 = \frac{b^2(a^2 - \alpha^2)}{a^2}$$

A) Dacă $|\alpha| > a \Rightarrow d \cap E = \emptyset \Rightarrow d$ este exterioară

B) Dacă $|\alpha| = a \Rightarrow y = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} d \cap E = \{A(a, 0)\}, \text{ dacă } d: x = a \\ d \cap E = \{A'(-a, 0)\}, \text{ dacă } d: x = -a \end{cases}$$

$\Rightarrow d$ este tangenta

c) Dacă $|\alpha| < a \Rightarrow y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \alpha^2} \Rightarrow d \cap E = \{2 \text{ puncte}\}$
 $\Rightarrow d$ este secantă

Observație. O dreaptă verticală este tangentă elipsei doar dacă dreapta conține punctele $A(a,0)$ sau $A'(-a,0)$.

② Dacă $\delta \nparallel Oy \Rightarrow \delta: y = mx + n, m, n \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{E} \cap \delta: \begin{cases} y = mx + n \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = mx + n \\ x^2 + \frac{a^2}{b^2} (mx + n)^2 = a^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$b^2 x^2 + a^2 (m^2 x^2 + n^2 + 2mnx) = a^2 b^2 \Leftrightarrow$$

$$(a^2 m^2 + b^2) x^2 + 2a^2 m n x + a^2 (n^2 - b^2) = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 4a^4 m^2 n^2 - 4(a^2 m^2 + b^2) a^2 (n^2 - b^2) \\ &= 4a^4 m^2 n^2 - 4a^4 m^2 n^2 + 4a^4 b^2 m^2 - 4a^2 b^2 n^2 + 4a^2 b^4 \\ &= 4a^2 b^2 (a^2 m^2 - n^2 + b^2) \end{aligned}$$

① Dacă $\Delta > 0 \Rightarrow \delta \cap \mathcal{E} = \{2 \text{ puncte}\} \Rightarrow \delta$ este secantă

② Dacă $\Delta < 0 \Rightarrow \delta \cap \mathcal{E} = \emptyset \Rightarrow \delta$ este exterioară

③ Dacă $\Delta = 0 \Rightarrow \delta \cap \mathcal{E} = \{1 \text{ punct}\} \Rightarrow \delta$ este tangentă

Ecuația magică a tangentei

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow a^2 m^2 - m^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow$$

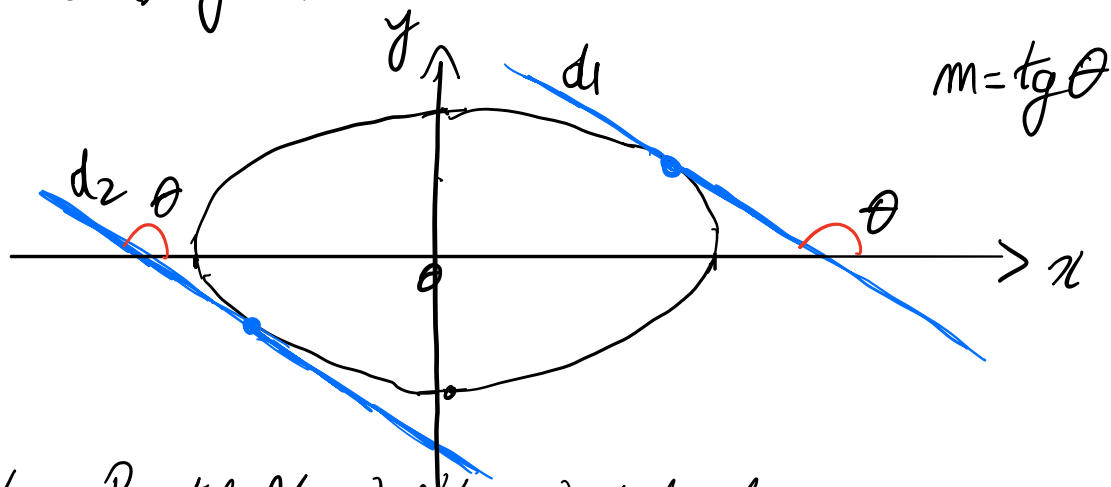
$$\Leftrightarrow m^2 = a^2 m^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow |m| = \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

Deci există 2 tangente la elipsă de panta m :

$$(d_1): y = mx + \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

$$(d_2): y = mx - \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$



Obs: Punctele $A(a, 0)$, $A'(-a, 0) \notin d_1, d_2$.

$$\text{R.A. pp. } A \in d_1 \Rightarrow 0 = am + \sqrt{a^2 m^2 + b^2} \text{ (fals)}$$

$$\text{R.A. pp. } A \in d_2 \Rightarrow 0 = am - \sqrt{a^2 m^2 + b^2} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{a^2 m^2 + b^2} = am \stackrel{>0}{|} \Rightarrow b = 0 \text{ (fals)}$$

Analog se arată că $A' \notin d_1$ și $A' \notin d_2$.

Observație. Prin punctele A și A' trece câte o singură tangentă la elipsă (dreapta verticală care conține A , respectiv A').

Propoziție. Fie elipsa de ecuație $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ și punctul $M(x_M, y_M) \in \mathcal{E}$. Atunci există o unică tangentă la $\mathcal{E}$ ce conține M , iar ec. ei este: $\frac{x \cdot x_M}{a^2} + \frac{y \cdot y_M}{b^2} = 1$ (se obține prin deducere în M)

Dem ○ Dacă $M = A$ am văzut că tangentă la $\mathcal{E}$ în A este

$$d: x = a \Leftrightarrow \frac{x \cdot a}{a^2} + \frac{y \cdot 0}{b^2} = 1$$

○ Dacă $M = A'$ am văzut că tangentă la $\mathcal{E}$ în A' este

$$d: x = -a \Leftrightarrow \frac{x \cdot (-a)}{a^2} + \frac{y \cdot 0}{b^2} = 1$$

○ Dacă $M \in \mathcal{E} \setminus \{A, A'\} \Rightarrow y_M \neq 0, x_M \neq \{\pm a\}$

Am văzut deja că dreapta căutată nu poate fi verticală, deci ea va avea ec.

$$d: y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

$$M \in d \Rightarrow y_M = mx_M \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2} \Leftrightarrow \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2} = y_M - mx_M \quad \Bigg\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d: y = mx + y_M - mx_M \Leftrightarrow d: y - y_M = m(x - x_M)$$

$$\pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2} = y_M - m x_M \quad |^2 \Rightarrow$$

$$a^2 m^2 + b^2 = y_M^2 + m^2 x_M^2 - 2 x_M y_M \cdot m$$

$$(a^2 - x_M^2) m^2 + 2 x_M y_M \cdot m - y_M^2 + b^2 = 0$$

$$\Delta = 4 x_M^2 y_M^2 - 4 (a^2 - x_M^2) (b^2 - y_M^2)$$

$$\Delta = 4 x_M^2 y_M^2 - 4 a^2 b^2 + 4 a^2 y_M^2 + 4 b^2 x_M^2 - 4 x_M^2 y_M^2$$

$$\Delta = -4 a^2 b^2 \left(1 - \frac{y_M^2}{b^2} - \frac{x_M^2}{a^2} \right)$$

$$\Delta = 0$$

$$m = \frac{-2 x_M y_M}{2(a^2 - x_M^2)} \Rightarrow m = \frac{x_M y_M}{x_M^2 - a^2}$$

$$ME \Rightarrow \frac{x_M^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x_M^2 = a^2 \left(1 - \frac{y_M^2}{b^2} \right) \Rightarrow$$

$$x_M^2 - a^2 = -\frac{a^2}{b^2} y_M^2$$

$$\Rightarrow m = \frac{x_M y_M}{-\frac{a^2}{b^2} y_M^2} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_M}{y_M}$$

$$\text{Decid: } y - y_M = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_M}{y_M} (x - x_M) \quad | \cdot y_M \neq 0$$

$$\Rightarrow d: y y_M - y_M^2 = -\frac{b^2}{a^2} (x_M x - x_M^2) \quad | \cdot \frac{1}{b^2}$$

$$\Rightarrow d: \frac{y y_M}{b^2} + \frac{x x_M}{a^2} = \frac{y_M^2}{b^2} + \frac{x_M^2}{a^2} \Rightarrow d: \frac{x x_M}{a^2} + \frac{y y_M}{b^2} = 1$$

Propozitie. Fie elipsa de ecuatie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ si punctul $P(x_p, y_p) \in \text{Ext } E$. At. exista 2 tangente la E ce trec prin P .

Dem: $P(x_p, y_p) \in \text{Ext } E \Rightarrow \frac{x_p^2}{a^2} + \frac{y_p^2}{b^2} > 1 \Rightarrow \frac{x_p^2}{a^2} > 1 - \frac{y_p^2}{b^2}$

Fie d o dreapta a.i. $P \in d$, d -tangenta la E .

1) Daca $d \parallel Oy \Rightarrow d: x = \alpha \Rightarrow d: x = x_p$
 $P \in d \Rightarrow x_p = \alpha$

Noti om vazut ca o dr. verticala este tang. la E daca ea contine $A(a, 0)$ sau $A'(-a, 0)$.

$\leadsto$ Daca $A(a, 0) \in d \Rightarrow x_p = a \Rightarrow d: x = a$

$\leadsto$ Daca $A'(-a, 0) \in d \Rightarrow x_p = -a \Rightarrow d: x = -a$

Obs. Daca $x_p \neq \{a, -a\}$ nu exista nici o tangenta verticala la elipsa ce trece prin P .

2) Daca $d \nparallel Oy \Rightarrow d: y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2} \Rightarrow$
 $P(x_p, y_p) \in d$

$\Rightarrow y_p = mx_p \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2} \Leftrightarrow \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2} = y_p - mx_p \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 m^2 + b^2 = y_p^2 + m^2 x_p^2 - 2mx_p y_p$

$\Leftrightarrow \underline{(a^2 - x_p^2)m^2 + 2x_p y_p m + b^2 - y_p^2 = 0} \quad (*)$

A) Dacă $x_p^2 = a^2 \Rightarrow x_p = a$ sau $x_p = -a$, (*) devine:

$$2x_p y_p m + b^2 - y_p^2 = 0 \Rightarrow$$

$$2a y_p m + b^2 - y_p^2 = 0$$

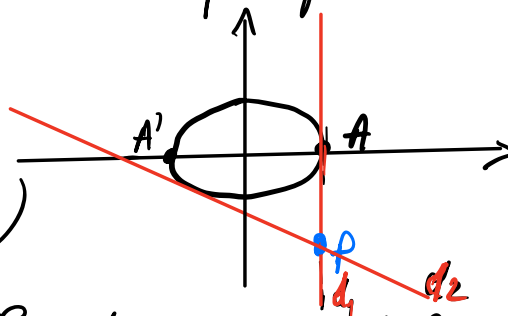
$$\left. \begin{array}{l} P \in \text{Ext } \mathcal{E} \\ x_p = \pm a \end{array} \right\} \Rightarrow y_p \neq 0 \quad \Rightarrow m = \frac{y_p^2 - b^2}{2a y_p}$$

Deci d este dr. ce conține $P(x_p, y_p)$ și are panta $m = \frac{y_p^2 - b^2}{2a y_p}$

$$d: y - y_p = \frac{y_p^2 - b^2}{2a y_p} (x - x_p)$$

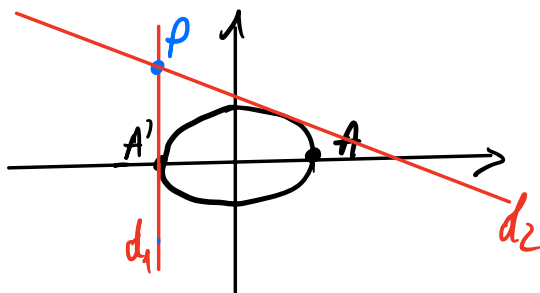
Concluzii : 1) Există 2 tangente la $\mathcal{E}$ ce trec prin punctul exterior $P(a, y_p) \in \text{Ext. } \mathcal{E}$:

$$\begin{cases} d_1: x = a \\ d_2: y - y_p = \frac{y_p^2 - b^2}{2a y_p} (x - a) \end{cases}$$



2) Există 2 tangente la $\mathcal{E}$ ce trec prin punctul exterior $P(-a, y_p) \in \text{Ext. } \mathcal{E}$:

$$\begin{cases} d_1: x = -a \\ d_2: y - y_p = \frac{y_p^2 - b^2}{2a y_p} (x + a) \end{cases}$$



B) Dacă $x_p^2 \neq a^2 \Rightarrow (*)$ este ec. de gradul 2:

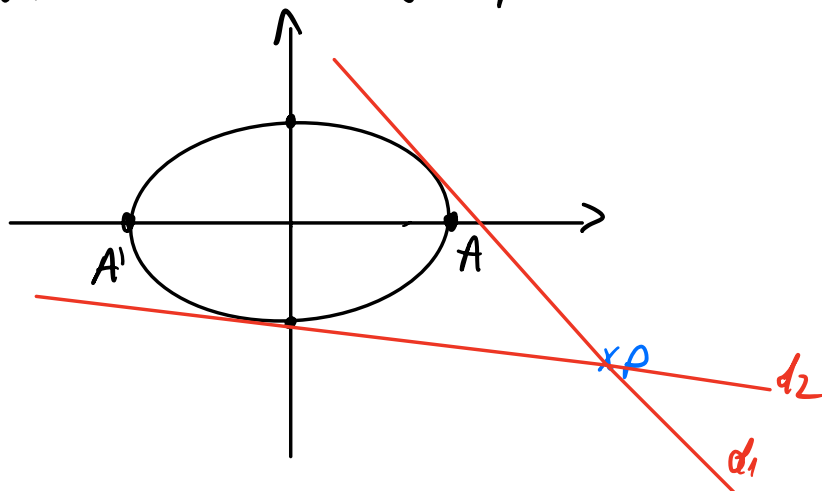
$$\Delta = 4x_p^2 y_p^2 - 4(a^2 - x_p^2)(b^2 - y_p^2)$$

$$\Delta = -4a^2 b^2 + 4a^2 y_p^2 + 4b^2 x_p^2$$

$$\Delta = 4a^2b^2 \left(\underbrace{\frac{x_p^2}{a^2} + \frac{y_p^2}{b^2} - 1}_{>0} \right) > 0 \Rightarrow (*) \text{ are 2 solutii reale}$$

$$m_{1,2} = \frac{-2x_p y_p \pm 2ab \sqrt{\frac{x_p^2}{a^2} + \frac{y_p^2}{b^2} - 1}}{2(a^2 - x_p^2)} = \frac{-x_p y_p \pm ab \sqrt{\frac{x_p^2}{a^2} + \frac{y_p^2}{b^2} - 1}}{a^2 - x_p^2}$$

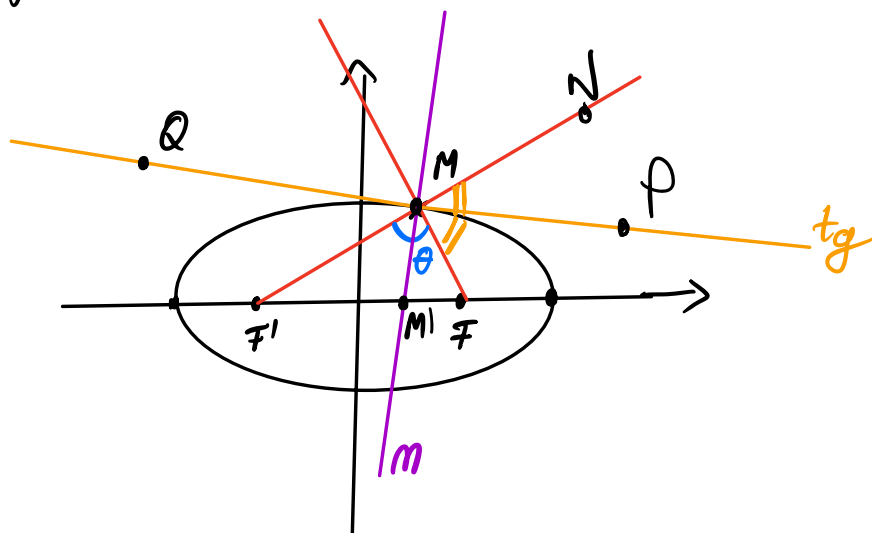
Concluzii: Există 2 tangente la E ce trec prin orice punct $P(x_p, y_p) \in \text{Ext } E$, $x_p \neq \pm a$ cu pantele m_1 și m_2 .



Definiție: S.m. normală la elipsă într-un punct al său $M(x_m, y_m)$ dreapta ce trece prin M și care este perpendiculară pe tangenta la elipsă în M .

Teoremă (proprietatea optică a elipsei)

Tangenta și normala la elipsă într-un punct $M(x_M, y_M) \neq \{A, A'\}$ sunt bisectoarele exterioară, respectiv interioară a unghiului format de razele focale MF și MF' .



Dem: $tg: \frac{x \cdot x_M}{a^2} + \frac{y \cdot y_M}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 x_M x + a^2 y_M y = a^2 b^2$

1) Fie $M \neq \{B, B'\}$

At. $tg: y = \frac{1}{a^2 y_M} (a^2 b^2 - b^2 x_M x) \Leftrightarrow y = \underbrace{-\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_M}{y_M}}_{=m_1} x + \frac{b^2}{y_M}$

$tg \perp n \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y_M}{x_M},$
 $m_1, m_2 = \text{panta } tg, \text{ resp. normalii}$

n: $y - y_M = \frac{a^2}{b^2} \frac{y_M}{x_M} (x - x_M)$

- Direcția dreptei n este dată de vect. $\vec{N}_1 = \frac{b^2}{a^2} \frac{x_M}{y_M} \vec{i} + \vec{j}$
- Direcția dreptei tg este dată de vect. $\vec{N}_2 = -\frac{a^2}{b^2} \frac{x_M}{y_M} \vec{i} + \vec{j}$

Determinăm $\{M'\} = m \cap \mathcal{O}x \Rightarrow y_{M'} = 0$

$$0 - y_M = \frac{a^2}{b^2} \frac{y_M}{x_M} (x_{M'} - x_M) \Leftrightarrow -\frac{b^2 x_M}{a^2 y_M} \cdot y_M = x_{M'} - x_M$$

$$\Leftrightarrow x_{M'} = x_M - \frac{b^2}{a^2} x_M \Rightarrow x_{M'} = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) x_M = \frac{c^2}{a^2} x_M$$

Deci $M' \left(\frac{c^2}{a^2} x_M, 0 \right)$

$$\overrightarrow{F'M'} = \left(\frac{c^2}{a^2} x_M + c, 0 \right); \quad \overrightarrow{M'F} = \left(c - \frac{c^2}{a^2} x_M, 0 \right)$$

$$|\overrightarrow{F'M'}|^2 = \left(\frac{c^2}{a^2} x_M + c \right)^2; \quad |\overrightarrow{M'F}|^2 = \left(c - \frac{c^2}{a^2} x_M \right)^2$$

$$\left(\frac{|\overrightarrow{F'M'}|}{|\overrightarrow{M'F}|} \right)^2 = \frac{\left(1 + \frac{c}{a^2} x_M \right)^2}{\left(1 - \frac{c}{a^2} x_M \right)^2} = \frac{(a^2 + c x_M)^2}{(a^2 - c x_M)^2} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{F'M'}}{\overrightarrow{M'F}} = \left| \frac{a^2 + c x_M}{a^2 - c x_M} \right|$$

$$\overrightarrow{F'M} = (x_M + c, y_M); \quad \overrightarrow{M'F} = (c - x_M, -y_M)$$

$$\left(\frac{|\overrightarrow{F'M}|}{|\overrightarrow{M'F}|} \right)^2 = \frac{(x_M + c)^2 + y_M^2}{(c - x_M)^2 + y_M^2} = \frac{(x_M + c)^2 + \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x_M^2)}{(c - x_M)^2 + \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x_M^2)} \quad \textcircled{=}$$

$$M \in \mathcal{E} \Rightarrow \frac{x_M^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y_M^2 = b^2 \left(1 - \frac{x_M^2}{a^2} \right) = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x_M^2)$$

$$\textcircled{=} \frac{a^2 (c + x_M)^2 + (a^2 - c^2) (a^2 - x_M^2)}{a^2 (c - x_M)^2 + (a^2 - c^2) (a^2 - x_M^2)} =$$

$$= \frac{a^2 (c^2 + x_M^2 + 2cx_M + a^2 - x_M^2 - c^2) + c^2 x_M^2}{a^2 (c^2 + x_M^2 - 2cx_M + a^2 - x_M^2 - c^2) + c^2 x_M^2}$$

$$= \frac{a^4 + 2cx_M a^2 + c^2 x_M^2}{a^4 - 2cx_M a^2 + c^2 x_M^2} = \frac{(a^2 + cx_M)^2}{(a^2 - cx_M)^2} \Leftrightarrow \frac{F'M}{MF} = \left| \frac{a^2 + cx_M}{a^2 - cx_M} \right|$$

Deci $\frac{F'M}{MF} = \frac{F'M'}{M'F}$ R. Teoremei bisect.
 $\Rightarrow [MM']$ bisect. $\angle F'MF \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ normala este bisectoarea interioară a unghiului $\angle F'MF$ not θ

(*) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Cum } tg \perp m, \\ [MM'] \text{ bisect. lui } \theta \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\theta}{2} + \widehat{FMP} = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\theta}{2} + \widehat{F'MQ} = \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \widehat{FMP} = \widehat{F'MQ}$

Dar $\widehat{NMP} = \widehat{F'MQ} \Rightarrow \widehat{FMP} = \widehat{NMP} \Rightarrow [MP]$ bisect. $\angle NMF \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ tangenta este bisectoarea exterioară a lui θ

2) Dacă $M = B$

$tg: y = b$

$m: x = 0$

$\triangle MFF'$ isoscel

$\Downarrow$
 $[MM']$ - bisect. int. a lui θ

$\Downarrow$
 m bisect int. a lui θ

(*)

$M = B'$

$tg: y = -b$

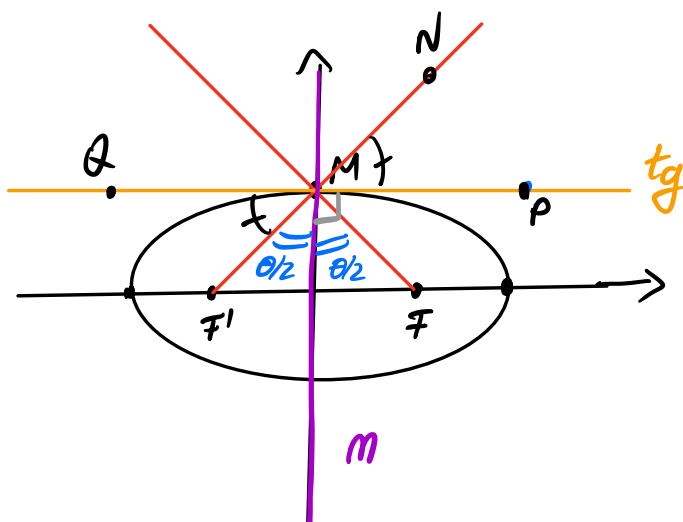
$m: x = 0$

$\triangle MFF'$ - isoscel

$\Downarrow$
 $[MM']$ - bisect. int. a lui θ

$\Downarrow$
 m bisect int. a lui θ

(*)



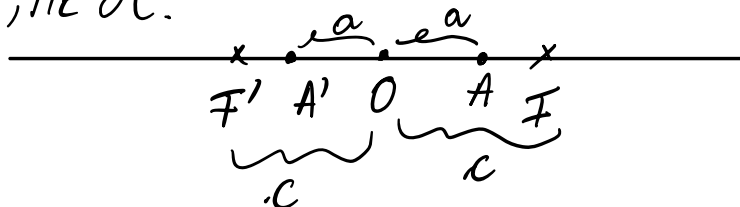
Hiperbela

Definiție Se consideră 2 puncte distincte F și $F' \in X$ cu $d(F, F') = 2c > 0$ și un nr. real a a.i. $0 < a < c$. S.m. hiperbola locul geometric al punctelor planului pt. care diferența distanțelor la punctele fixe F, F' este constantă și modul ei este egal cu $2a$:

$$\mathcal{H} = \{P \in \mathbb{E}_2 / |dist(P, F) - dist(P, F')| = 2a\}$$

Punctele F, F' s.m. locurile hiperbolei, dr. FF' s.m. axa focală $2c$ s.m. distanța focală.

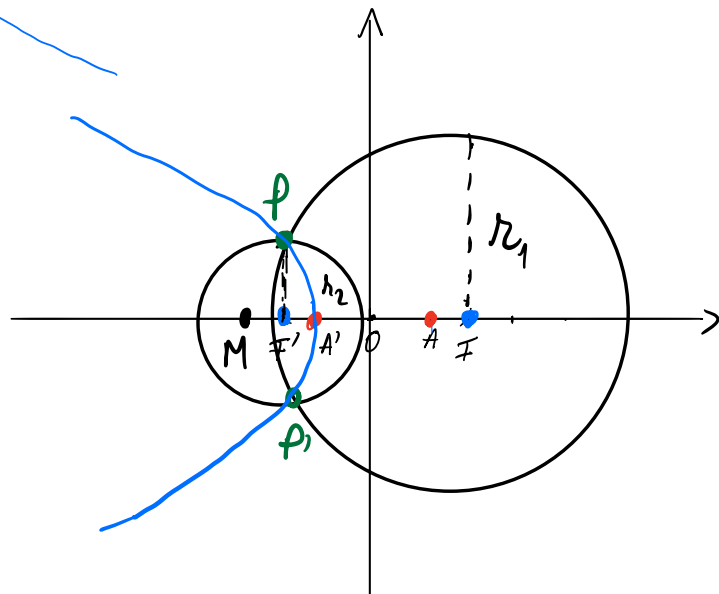
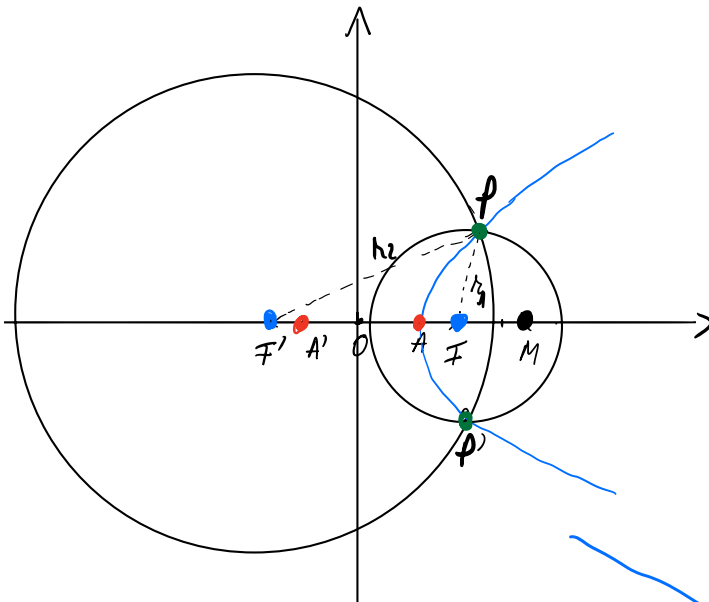
Ca și la elipsă vom det. $A, A' \in FF'$ a.i. $d(O, A) = d(O, A') = a$ și $F' - A' - O - A - F$, unde O - mij. $(F'F)$. Evident $A, A' \in \mathcal{H}$.



$$|d(A, F) - d(A, F')| = |(c-a) - (a+c)| = 2a$$

$$|d(A', F) - d(A', F')| = |(a+c) - (c-a)| = 2a$$

Punctele A, A' s.m. vârfurile hiperbolei.
 Pentru a construi hiperbola prin puncte procedăm
 în modul următor: alegem un punct arbitrar M pe
 axa focală, diferit de focare și vârfuri, apoi intersectăm
 cerul de centru F și raza AM cu cerul de centru F'
 și raza $A'M$. Punctele de intersecție vor aparține hiperbolei.



Not cu $AM=r_1$ și $A'M=r_2$
 Pentru a avea puncte de intersecție trebuie ca

$$d(F, F') \leq r_1 + r_2 \Leftrightarrow \underline{2c \leq r_1 + r_2}$$

Arătăm că $M \notin (F'F)$

R.A. pp. că $M \in (F'F)$:

$$\rightarrow \text{Dacă } M \in (A'A) \Rightarrow \left. \begin{aligned} AM + A'M &= r_1 + r_2 \\ &= AA' = 2a \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{r_1 + r_2 = 2a < 2c} \quad (\text{Fals})$$

$$\rightarrow \text{Dacă } M \in (AF) \Rightarrow \left. \begin{aligned} AM + A'M &= A'A + 2AM < 2a + 2(c-a) = 2c \\ &= r_1 + r_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow r_1 + r_2 < 2c \quad (\text{Fals})$$

$$\rightarrow \text{Dacă } M \in (F'A') \Rightarrow \left. \begin{aligned} AM + A'M &= AA' + 2A'M < 2c \\ &= r_1 + r_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow r_1 + r_2 < 2c \quad (\text{Fals})$$

Deci $M \notin (F'F)$. Dacă

$$\rightarrow F' - F - M \Rightarrow \left. \begin{aligned} AM + A'M &= A'A + 2AM > 2a + 2(c-a) > 2c \quad (\text{OK}) \\ \parallel & \parallel \\ r_1 & r_2 \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow M - F' - F \Rightarrow \left. \begin{aligned} AM - A'M &= -A'A = -2a \Rightarrow r_1 - r_2 = -2a \Leftrightarrow |r_1 - r_2| = 2a \\ \parallel & \parallel \\ r_1 & r_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} AM + A'M &= A'A + 2A'M > 2c \quad (\text{OK}) \\ AM - A'M &= AA' = 2a \Rightarrow r_1 - r_2 = 2a \Rightarrow |r_1 - r_2| = 2a \end{aligned} \right\}$$

Deci, în ambele cazuri, $|r_1 - r_2| = 2a$.

Fie $P \in \mathcal{C}(F, r_1) \cap \mathcal{C}(F', r_2) \Leftrightarrow$

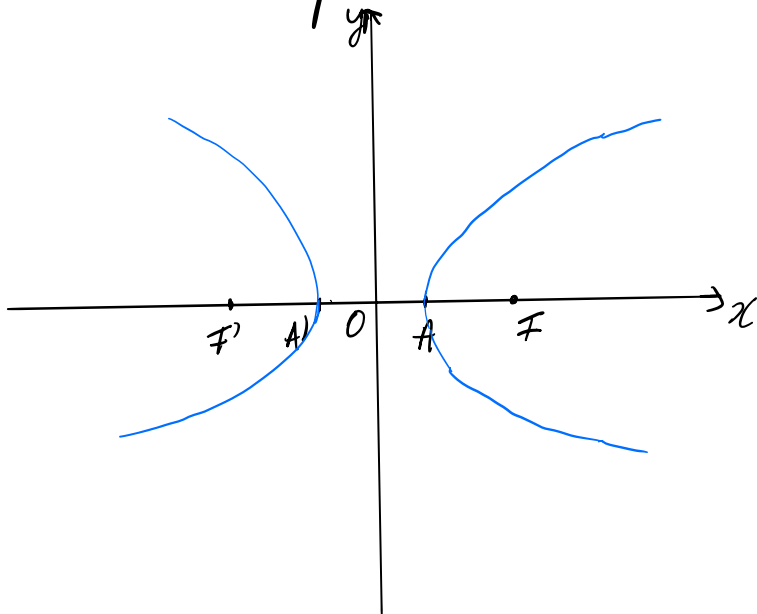
$$\Leftrightarrow |d(P, F) - d(P, F')| = |r_1 - r_2| = 2a \Leftrightarrow P \in \mathcal{H}.$$

Ecuațiile hiperbolei

Fie $R = \{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ un reper ortonormat a.t. O mij. $(F'F)$,
 $\vec{i} = \frac{\vec{F'F}}{|\vec{F'F}|}$, $\vec{j} \perp \vec{i}$, $|\vec{j}|=1$, $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ b.o.p.

Not. Ox, Oy axele de coordonate

În raport cu acest reper scriem: $F(c, 0), F'(-c, 0), A(a, 0), A'(-a, 0)$



$$\text{Fie } P(x, y) \in \mathcal{H} \Rightarrow |d(P, F) - d(P, F')| = 2a$$

$$\Leftrightarrow \left| \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad |^2$$

$$\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow 2xc + 2xc = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad | :4$$

$$\Rightarrow \boxed{\pm a \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = xc - a^2} \quad (1)$$

$$\Rightarrow a^2((x-c)^2 + y^2) = x^2c^2 + a^4 - 2xca^2$$

$$\Leftrightarrow \underline{a^2x^2} - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = \underline{x^2c^2} + a^4 - 2a^2cx$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 + a^2(c^2 - a^2) = 0$$

$$\text{Not. } \boxed{b = \sqrt{c^2 - a^2}}$$

$$\Leftrightarrow -b^2x^2 + a^2y^2 + a^2b^2 = 0 \quad / : (-a^2b^2)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

$$\text{Obs. } b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow x^2 = a^2 \underbrace{\frac{(b^2 + y^2)}{b^2}}_{\geq 1} \Rightarrow \boxed{x \geq |a|}$$

2) Am (o) avem

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a \Rightarrow \text{Verificăm că:}$$

$$\begin{cases} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - 2a \geq 0 \\ \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d(P, F') \geq 2a \\ d(P, F) \geq 2a \end{cases}$$

R.A. pp. $d(P, F') < 2a$.

Am văzut mai deșeură că pt. $\forall P \in \mathcal{H}$:

$$d(P, F) + d(P, F') \geq 2c \text{ (ca cele 2 cercuri să se intersecteze)}$$

$\Downarrow$

$$\underline{2a > d(P, F')} \geq 2c - d(P, F) \geq \underline{2c} \Rightarrow \underline{a > c} \text{ (fals)}$$

Dei $d(P, F') \geq 2a$.

R.A. pp. $d(P, F) < 2a$

Am văzut mai deșeură că pt. $\forall P \in \mathcal{H}$:

$$d(P, F) + d(P, F') \geq 2c \text{ (ca cele 2 cercuri să se intersecteze)}$$

$\Downarrow$

$$\underline{2a > d(P, F)} \geq 2c - d(P, F') \geq \underline{2c} \Rightarrow \underline{a > c} \text{ (fals)}$$

Dei $d(P, F) \geq 2a$.

Reciproc, dacă $P(x, y)$ satisface $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, at.
 onotăm că $P \in \mathcal{H}$, ie. $|d(P, F) - d(P, F')| = 2a$

$$\begin{aligned} |d(P, F) - d(P, F')| &= \left| \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right| = \\ &= \left| \sqrt{(x-c)^2 + \frac{b^2 x^2 - a^2 b^2}{a^2}} - \sqrt{(x+c)^2 + \frac{b^2 x^2 - a^2 b^2}{a^2}} \right| \\ &= \left| \sqrt{\frac{a^2(x^2 - 2cx + c^2) + b^2 x^2 - a^2 b^2}{a^2}} - \sqrt{\frac{a^2(x^2 + 2cx + c^2) + b^2 x^2 - a^2 b^2}{a^2}} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sqrt{\frac{(a^2+b^2)x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 - a^2b^2}{a^2}} - \sqrt{\frac{(a^2+b^2)x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 - a^2b^2}{a^2}} \right| \\
&\stackrel{c^2 = a^2 + b^2}{=} \left| \sqrt{\frac{c^2x^2 - 2a^2cx + a^4}{a^2}} - \sqrt{\frac{c^2x^2 + 2a^2cx + a^4}{a^2}} \right| \\
&= \left| \sqrt{\frac{(cx - a^2)^2}{a^2}} - \sqrt{\frac{(cx + a^2)^2}{a^2}} \right| \\
&= \left| \frac{|cx - a^2|}{a} - \frac{|cx + a^2|}{a} \right|
\end{aligned}$$

① Dacă $\underbrace{x \geq a}_{a < c} \Rightarrow \begin{cases} cx - a^2 \geq ca - a^2 = a(c - a) > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow |cx - a^2| = cx - a^2 \\ cx + a^2 \geq c(a + c) > 0 \Rightarrow |cx + a^2| = cx + a^2 \end{cases}$

Deci

$$\left| \frac{|cx - a^2|}{a} - \frac{|cx + a^2|}{a} \right| = \left| \frac{cx - a^2 - cx - a^2}{a} \right| = \left| \frac{-2a^2}{a} \right| = 2a$$

② Dacă $\underbrace{x \leq -a}_{a < c} \Rightarrow \begin{cases} cx - a^2 \leq -ac - a^2 = -a(c + a) < 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow |cx - a^2| = a^2 - cx \\ cx + a^2 \leq -ac + a^2 = a(a - c) < 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow |cx + a^2| = -a^2 - cx \end{cases}$

Deci

$$\left| \frac{|cx - a^2|}{a} - \frac{|cx + a^2|}{a} \right| = \left| \frac{a^2 - cx + a^2 + cx}{a} \right| = \left| \frac{2a^2}{a} \right| = 2a$$

În concluzie,

$$|d(P, F) - d(P, F')| = \underline{\underline{2a}} \Leftrightarrow P \in \mathcal{H}.$$

Ecuația canonică a lui $\mathcal{H}$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $b^2 = c^2 - a^2$

$\mathcal{H} = \{P(x,y) \in \mathbb{E}_2 / \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ • a s.m. semi-axa mare
• b s.m. semi-axa mică

Observații: a) Nu avem neapărat $a > b$.

b) ○ Ox este axa de simetrie pt. $\mathcal{H}$

$$P(x,y) \in \mathcal{H} \Rightarrow P(-x,y) \in \mathcal{H}$$

○ Oy este axă de simetrie pt. $\mathcal{H}$

$$P(x,y) \in \mathcal{H} \Rightarrow P(x,-y) \in \mathcal{H}$$

• O centru de simetrie pt. $\mathcal{H}$

$$P(x,y) \in \mathcal{H} \Rightarrow P(-x,-y) \in \mathcal{H}$$

c) Din ec. canonică obs. că doar axa Ox taie hiperbola, nu și axa Oy . Deci, spre deosebire de elipsă, hiperbola are doar 2 vârfuri.

○ Definem interiorul hiperbolei

$$\text{Int } \mathcal{H} = \{P(x,y) \in \mathbb{E}_2 / \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1\}$$

○ Definem exteriorul hiperbolei

$$\text{Ext } \mathcal{H} = \{P(x,y) \in \mathbb{E}_2 / \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1\}$$

Ecuațiile explicite

$$\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{b^2 x^2 - a^2 b^2}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2)$$

$$P(x, y) \in \mathcal{H} \Rightarrow x^2 - a^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)}$$

$$\begin{cases} y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, & \text{pentru } y \geq 0 \\ y = -\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, & \text{pentru } y < 0. \end{cases}$$

Pentru a desena hiperbola este suficient să studiem $\text{Gr}_f y$ din primul cadran, adică să det.

$$\text{Gr}_f y = \left\{ (x, y(x)) \mid x \geq a, y(x) = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \right\}$$

$$y'(x) = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-a^2}} \cdot 2x = \frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$y'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$y'(x) > 0, \forall x > a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} y'(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow \infty} y'(x) = \frac{b}{a}$$

$$y''(x) = \frac{b}{a} \cdot \frac{\sqrt{x^2-a^2} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-a^2}} \cdot 2x}{x^2-a^2}$$

$$= \frac{b}{a} \frac{x^2-a^2-x^2}{(x^2-a^2)^{3/2}} = \frac{-ab}{(x^2-a^2)^{3/2}} < 0$$

x	a	$+\infty$				
$y'(x)$	$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$ $\frac{b}{a}$	
$y''(x)$		$-$	$-$	$-$	$-$	
$y(x)$	0	$\nearrow$ $\cup$				∞

$\lim_{x \rightarrow a} y'(x) = +\infty \Rightarrow$ dr. ce trece prin $A(a,0)$ și este paralelă cu axa Oy , deci este verticală, este tangentă la hiperbolă în A .

$$d: x = a.$$

Vedem dacă avem asimptote

① $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \infty \Rightarrow$ nu avem asimptotă orizontală

② $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{a} \frac{\sqrt{x^2 - a}}{x} = \frac{b}{a} \in \mathbb{R}^* \Rightarrow m = \frac{b}{a}$

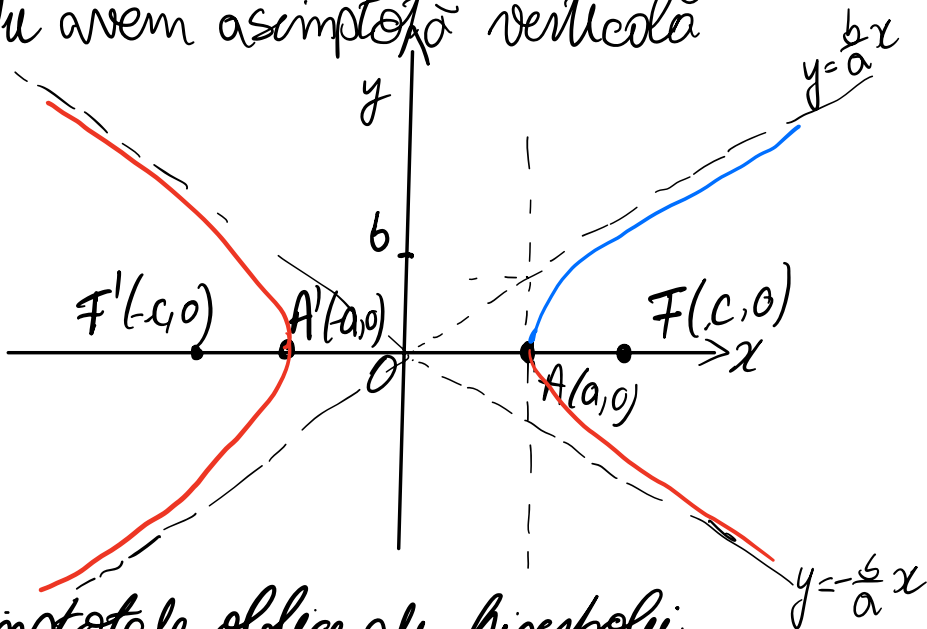
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (y(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a} - \frac{b}{a} x \right)$$

$$= \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - a} - x)(\sqrt{x^2 - a} + x)}{\sqrt{x^2 - a} + x} = \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - a - x^2}{\sqrt{x^2 - a} + x} = 0 \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow m = 0$.

$\Rightarrow$ 2r. $y = \frac{b}{a} x + 0 (\Rightarrow y = \frac{b}{a} x)$ este asimptotă oblică

③ Nu avem asimptotă verticală



Asimptotele oblice ale hiperbolii:

$$d_1: y = \frac{b}{a} x, \quad d_2: y = -\frac{b}{a} x$$

Directoarele hiperbolei

Am văzut că toate punctele de pe hiperbolă verifică

$$\pm a \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = xc - a^2 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm \frac{1}{a} (xc - a^2) \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm \frac{c}{a} \left(x - \frac{a^2}{c}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \frac{c}{a} \left|x - \frac{a^2}{c}\right|$$

Not. $\boxed{e = \frac{c}{a} > 1}$ excentricitatea hiperbolei

Ca și în cazul elipsei, se poate dem. că rel. anterioară se poate rescrie $\boxed{d(P, F) = e d(P, d')}$

unde $P(x, y) \in H$ oarecare, $F(c, 0)$ și

$d: x = \frac{a^2}{c}$ d.m. directoarea hiperbolei

Analog, se obt. $d(P, F') = e d(P, d')$, unde

$\left\{ \begin{array}{l} d': x = -\frac{a^2}{c} \text{ d.m. } \underline{\text{directoarea hiperbolei}} \\ F(-c, 0) \end{array} \right.$

Ecuațiile parametrică

$$\cosh: \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty), \quad \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

$$\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = \frac{e^{2t} + e^{-2t} + 2 - e^{2t} - e^{-2t} + 2}{4} = \frac{4}{4} = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\mathcal{H} = \left\{ P(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

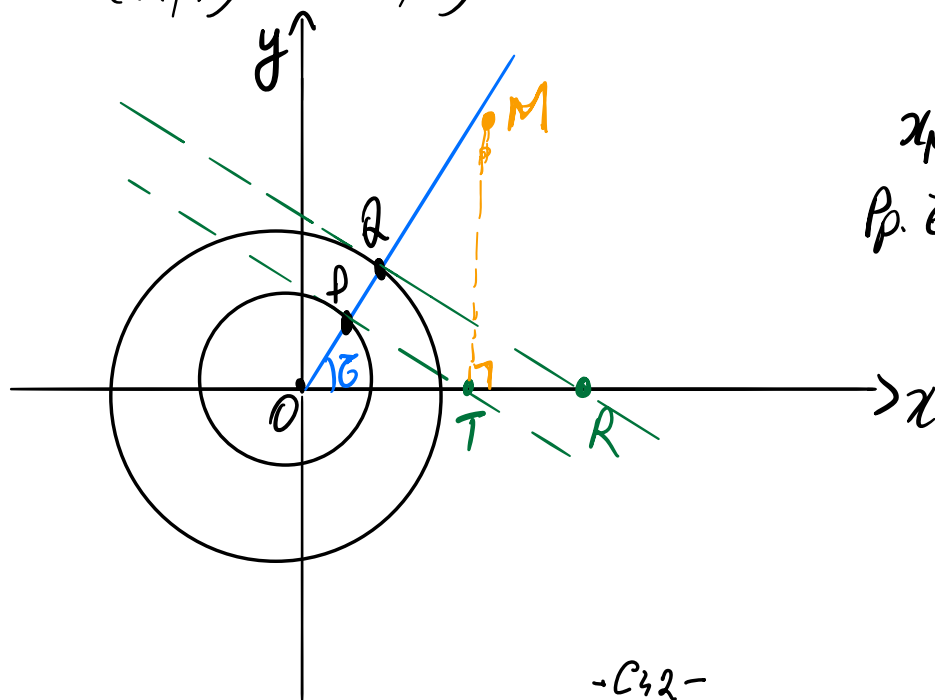
Putem parametriza hiperbola în modul următor:

$$\rightarrow \text{pt. ramura coresp. lui } x \geq a: \begin{cases} x = a \cosh t \ (> 0) \\ y = b \sinh t, \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{pt. ramura coresp. lui } x \leq -a: \begin{cases} x = -a \cosh t \ (< 0) \\ y = b \sinh t, \ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Se poate da și o altă repur. parametrică a hiperbolei, pt. care vom da o interpretare geom. a parametrului.

Se consideră 2 cercuri concentrice cu centrul comun O , de raze $a < b$. Fixăm un reper ortonormat cu axe (x, y) . O semidreaptă cu originea în O se rotește în jurul lui O . Într-o poziție intermediară face unghiul θ cu Ox și intersectează cerul de rază a în P , iar cerul de rază b în Q . Tangentele în P , respectiv Q la cele 2 cercuri intersectează Ox în T , respectiv R . Pe perpendiculara în T pe Ox se ia punctul M a.i. $d(M, T) = d(Q, R)$.



$$x_M = ?, y_M = ?$$

$$\text{p. } \theta \neq \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$$

$$\sec \epsilon = \frac{1}{\cos \epsilon}$$

$$P \in \mathcal{C}(0, a) \Rightarrow \begin{cases} x_P = a \cos \epsilon \\ y_P = a \sin \epsilon \end{cases} \Rightarrow P_T: \frac{x - a \cos \epsilon}{-\sin \epsilon} = \frac{y - a \sin \epsilon}{\cos \epsilon}$$

$$\vec{OP} = a(\cos \epsilon \vec{i} + \sin \epsilon \vec{j})$$

For $\vec{u} \perp \vec{OP}$, $\vec{u} = -\sin \epsilon \vec{i} + \cos \epsilon \vec{j}$

$$PT \cap Ox = \{T\} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ T: \frac{x - a \cos \epsilon}{-\sin \epsilon} = -a \frac{\sin \epsilon}{\cos \epsilon} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{a \sin^2 \epsilon}{\cos \epsilon} + a \cos \epsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{a}{\cos \epsilon} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T\left(\frac{a}{\cos \epsilon}, 0\right) \Leftrightarrow \boxed{T(a \sec \epsilon, 0)} \Rightarrow \boxed{x_M = a \sec \epsilon}$$

$$MT \parallel Oy \Rightarrow x_M = x_T$$

$$\underline{d(M, T) = d(Q, R) = ?}$$

$$Q \in C(0, b) \Rightarrow \begin{cases} x_Q = b \cos \theta \\ y_Q = b \sin \theta \end{cases}$$

$$QR: \frac{x - b \cos \theta}{-\sin \theta} = \frac{y - b \sin \theta}{\cos \theta}$$

$$QR \cap Ox = \{R\} \Rightarrow R: \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x - b \cos \theta}{-\sin \theta} = -\frac{b \sin \theta}{\cos \theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow R: \begin{cases} y = 0 \\ x = +\frac{b \sin^2 \theta}{\cos \theta} + b \cos \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{b}{\cos \theta} \end{cases} \rightarrow R\left(\frac{b}{\cos \theta}, 0\right)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QR} &= \left(\frac{b}{\cos \theta} - b \cos \theta, -b \sin \theta \right) = b \left(\frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta}, -\sin \theta \right) \\ &= b \left(\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}, -\sin \theta \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{QR}| &= b \cdot \sqrt{\frac{\sin^4 \theta}{\cos^2 \theta} + \sin^2 \theta} = b \sqrt{\frac{\sin^4 \theta + \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta)}{\cos^2 \theta}} \\ &= b \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} = b \cdot \left| \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right| = b |\tan \theta| \end{aligned}$$

$$d(M, T) = d(Q, R) = b |\tan \theta|$$

$$\begin{aligned} (x_M - x_T)^2 + (y_M - y_T)^2 &= b^2 \tan^2 \epsilon \\ \stackrel{=0}{=} y_M^2 &= b^2 \tan^2 \epsilon \\ \Downarrow \\ \boxed{y_M = b \tan \epsilon} \end{aligned}$$

Dei $M(a \sec \epsilon, b \tan \epsilon) \Rightarrow M\left(\frac{a}{\cos \epsilon}, \frac{b \sin \epsilon}{\cos \epsilon}\right)$

Obs. c. $M \in H$: $\frac{a^2}{\cos^2 \epsilon a^2} - \frac{b^2 \sin^2 \epsilon}{\cos^2 \epsilon b^2} = 1.$

Am obținut astfel o metodă de construcție a hiperbolei prin puncte.

It. a obține param. precedentă se poate face o schimbare de parametru $t = \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\epsilon}{2}\right)$

Poziția relativă a unei drepte față de o hiperbolă

Propoziție 1. Fie $\mathcal{H}$ o hiperbolă și d o dreaptă. Atunci avem una din următoarele posibilități:

- i) $d \cap \mathcal{H} = \emptyset$, iar în acest caz d s.m. exterioară hiperbolei.
- ii) $d \cap \mathcal{H} = \{1 \text{ punct}\}$ și $d \parallel$ una din asimptotele hiperbolei, iar în acest caz d s.m. secantă hiperbolei de direcție asimptotică sau secantă asimptotică.
- iii) $d \cap \mathcal{H} = \{1 \text{ punct}\}$ și $d \nparallel$ cu asimptotele hiperbolei, iar în acest caz d s.m. tangentă hiperbolei.
- iv) $d \cap \mathcal{H} = \{2 \text{ puncte}\}$, iar în acest caz d s.m. secantă hiperbolei.

Dem: I $d \parallel Oy \Rightarrow d: x = \alpha$

$$\mathcal{H} \cap d: \begin{cases} x = \alpha \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{\alpha^2}{a^2} - 1 \Rightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2} (\alpha^2 - a^2)$$

A) Dacă $|\alpha| < a$ $\Rightarrow d \cap \mathcal{H} = \emptyset \Rightarrow d$ este exterioară

B) Dacă $|\alpha| = a$ $\Rightarrow y = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} d \cap \mathcal{H} = \{A(a, 0)\}, \text{ dacă } d: x = a \\ d \cap \mathcal{H} = \{A'(-a, 0)\}, \text{ dacă } d: x = -a \end{cases}$$

Asimptotele hiperbolii sunt $d_1: y = \frac{b}{a}x$ și $d_2: y = -\frac{b}{a}x$.
 În acest caz, $d \nparallel d_1$, $d \nparallel d_2$. Deci d este tangenta.
 c) Dacă $|a| > a \Rightarrow y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - a^2} \Rightarrow d \cap H = \{2 \text{ puncte}\}$
 $\Rightarrow d$ este secantă

Observație 2. O dreaptă verticală este tangentă hiperbolii doar dacă conține $A(a, 0)$ sau $A'(-a, 0)$.

$$\boxed{\text{II}} \quad \boxed{d \nparallel O_y} \Rightarrow d: y = mx + n$$

$$H \cap d: \begin{cases} y = mx + n \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow b^2 x^2 - a^2 (mx + n)^2 = a^2 b^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (b^2 - a^2 m^2) x^2 - 2a^2 m n x - a^2 (n^2 + b^2) = 0 \quad (*)$$

A) $b^2 - a^2 m^2 = 0$ $\Leftrightarrow m^2 = \frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow m = \pm \frac{b}{a} \neq 0 \Rightarrow d \parallel d_1$ sau $d \parallel d_2$, d_1, d_2 - asimptotele oblice ale hiperbolii

$$(*) \Leftrightarrow -2a^2 m n x + a^2 (n^2 + b^2) = 0 \quad |:a^2$$

$$\Leftrightarrow -2mnx + n^2 + b^2 = 0 \quad (\stackrel{b^2 = a^2 m^2}{=})$$

$$\Leftrightarrow -2mnx + n^2 + m^2 a^2 = 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow 2mnx = n^2 + m^2 a^2$$

$$\Rightarrow m \cdot x = \frac{n^2 + m^2 a^2}{2m}$$

A.1) Dacă $m \leq 0$ $\Rightarrow 0 = \frac{ma^2}{2}$ (fals) $\Rightarrow \mathcal{H} \cap \mathcal{S} = \emptyset \Rightarrow$
 $\Rightarrow \mathcal{S}$ este exterioară

A.2) Dacă $m \neq 0$ $\Rightarrow x = \frac{m^2 + m^2 a^2}{2mm} \Rightarrow \mathcal{H} \cap \mathcal{S} = \{ \text{1 punct} \}$.

Am văzut deja că $\mathcal{S}$ este paralelă cu asimptotele oblice $\Rightarrow \mathcal{S}$ este secantă cu direcție asimptotică

B) $b^2 - a^2 m^2 \neq 0$ $\Rightarrow m \neq \pm \frac{b}{a} \Rightarrow \mathcal{S} \nparallel \mathcal{L}_1$ și $\mathcal{S} \nparallel \mathcal{L}_2$ (asimpt. oblice).

$$\Delta = 4a^4 m^2 m^2 + 4(b^2 - a^2 m^2) \cdot a^2 (m^2 + b^2)$$

$$\Delta = 4a^2 b^2 (m^2 + b^2 - a^2 m^2)$$

B.1) Dacă $\Delta < 0$ $\Leftrightarrow m^2 + b^2 - a^2 m^2 < 0 \Leftrightarrow m^2 < a^2 m^2 - b^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\sqrt{a^2 m^2 - b^2}, \sqrt{a^2 m^2 - b^2}) \\ a^2 m^2 - b^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\sqrt{a^2 m^2 - b^2}, \sqrt{a^2 m^2 - b^2}) \\ m \in (-\infty, -\frac{b}{a}] \cup [\frac{b}{a}, +\infty) \end{cases}$$

$$\text{Dar } m \neq \pm \frac{b}{a} \Rightarrow \begin{cases} m \in (-\sqrt{a^2 m^2 - b^2}, \sqrt{a^2 m^2 - b^2}) \\ m \in (-\infty, -\frac{b}{a}) \cup (\frac{b}{a}, +\infty) \end{cases},$$

at. $\mathcal{S} \cap \mathcal{H} = \emptyset \Rightarrow \mathcal{S}$ este exterioară

B.2) Dacă $\Delta = 0$ $\Leftrightarrow m = \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$
 $\left\{ m \in (-\infty, -\frac{b}{a}) \cup (\frac{b}{a}, +\infty) \right\}$
 at. $d \cap H = \{1 \text{ punct}\} \Rightarrow d$ este tangentă.

Observație 3 Ecuația magică a tangentelor la H de punct m
 $y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$, $m \in (-\infty, -\frac{b}{a}) \cup (\frac{b}{a}, \infty)$

B.3) Dacă $\Delta > 0$ $\Leftrightarrow m^2 + b^2 - a^2 m^2 > 0$
 $\left\{ m \in (-\infty, -\sqrt{a^2 m^2 - b^2}) \cup (\sqrt{a^2 m^2 - b^2}, +\infty) \right\}$
 $\left\{ m \in (-\infty, -\frac{b}{a}) \cup (\frac{b}{a}, \infty) \right\}$

$\Leftrightarrow$ Sau
 $\left\{ \begin{array}{l} m \in \mathbb{R} \\ m \in (-\frac{b}{a}, \frac{b}{a}) \end{array} \right\}$

at. $d \cap H = \{2 \text{ puncte}\} \Rightarrow d$ este secantă

Observație 4 Fie $d_{1,2}: y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$ tangentele la H de punct m . Punctele $A(a,0), A'(-a,0) \notin d_1, d_2$.

$$\left[\begin{array}{l} 0 = \pm ma \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2} \Leftrightarrow \pm ma = \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2} / 2 \\ \Rightarrow m^2 a^2 = a^2 m^2 - b^2 \Leftrightarrow b^2 = 0 \text{ (fals)} \end{array} \right]$$

Observație 5. Prin punctele A și A' trec câte o singură tangentă la hiperbolă (dreptele verticale care le conțin).

Propoziție 2 Fie hiperbola de ecuație $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ și punctul $M(x_M, y_M) \notin \mathcal{H}$.
Atunci există o unică tangentă la $\mathcal{H}$ ce conține M , iar ec.
ei este: $\frac{x \cdot x_M}{a^2} - \frac{y \cdot y_M}{b^2} = 1$ (se obține prin dedublare în M)

Dem. ① Dacă $M=A \Rightarrow d: x=a \Leftrightarrow \frac{x \cdot a}{a^2} - \frac{y \cdot 0}{b^2} = 1$

② Dacă $M=A' \Rightarrow d: x=-a \Leftrightarrow \frac{x \cdot (-a)}{a^2} - \frac{y \cdot 0}{b^2} = 1$

③ Dacă $M \in \mathcal{H} \setminus \{A, A'\} \Rightarrow x_M \neq \{a, -a\}, y_M \neq 0$.

Din Obs. 2 (care spune că o dr. verticală este tang. doar dacă conține A sau A') $\Rightarrow d \nparallel Oy$. Deci, din Obs. 3 avem că

$$d: y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}, \quad m \in (-\infty, -\frac{b}{a}) \cup (\frac{b}{a}, \infty)$$

$$M \in d \Rightarrow y_M = mx_M \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2} = y_M - mx_M \Leftrightarrow \underline{y - y_M = m(x - x_M)}.$$

$$\Leftrightarrow a^2 m^2 - b^2 = y_M^2 + m^2 x_M^2 - 2x_M y_M m$$

$$\Rightarrow \underbrace{(a^2 - x_M^2)}_{\neq 0} m^2 + 2 x_M y_M m - (b^2 + y_M^2) = 0$$

$$\Delta = 4x_M^2 y_M^2 + 4(a^2 - x_M^2)(b^2 + y_M^2)$$

$$\Delta = 4[a^2(b^2 + y_M^2) - b^2 x_M^2]$$

$$\Delta = 4a^2 b^2 \left[1 + \frac{y_M^2}{b^2} - \frac{x_M^2}{a^2} \right]$$

$$\Delta = 0$$

$$m = \frac{-2x_M y_M}{2(a^2 - x_M^2)} = \frac{-x_M y_M}{a^2 - x_M^2}$$

$$\frac{x_M^2}{a^2} - \frac{y_M^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x_M^2 = \frac{a^2}{b^2} (b^2 + y_M^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_M^2 = a^2 + \frac{a^2}{b^2} y_M^2 \quad / - x_M^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = a^2 - x_M^2 + \frac{a^2}{b^2} y_M^2 \Leftrightarrow \underline{a^2 - x_M^2 = -\frac{a^2}{b^2} y_M^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{m = \frac{b^2}{a^2} \frac{x_M}{y_M}}$$

$$\text{Def } \delta: y - y_M = \frac{b^2}{a^2} \frac{x_M}{y_M} (x - x_M) \quad / \cdot \frac{y_M}{b^2}$$

$$\Leftrightarrow \delta: \frac{y y_M}{b^2} - \frac{y_M^2}{b^2} = \frac{x x_M}{a^2} + \frac{x_M^2}{a^2} = 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow \delta: \boxed{\frac{x x_M}{a^2} - \frac{y y_M}{b^2} = 1}$$

Definiție. S.m. normală la hiperbolă într-un punct al său $M(x_M, y_M)$, dreapta ce trece prin M și care este perpendiculară pe tangenta la hiperbolă în M .

d = tangenta la $\mathcal{H}$ în M ; m = normală la $\mathcal{H}$ în M .

I Dacă $M=A$ sau $M=A'$

$$\begin{array}{ccc} d: x=a & \} & d: x=-a \\ \parallel & & \parallel \\ m: y=0 & & m: y=0. \end{array}$$

II) Dacă $M \in \mathcal{H} \setminus \{A, A'\}$

$$d: \frac{x \cdot x_M}{a^2} - \frac{y \cdot y_M}{b^2} = 1 \Leftrightarrow d: y = \frac{b^2}{y_M} \left(\frac{x \cdot x_M}{a^2} - 1 \right)$$

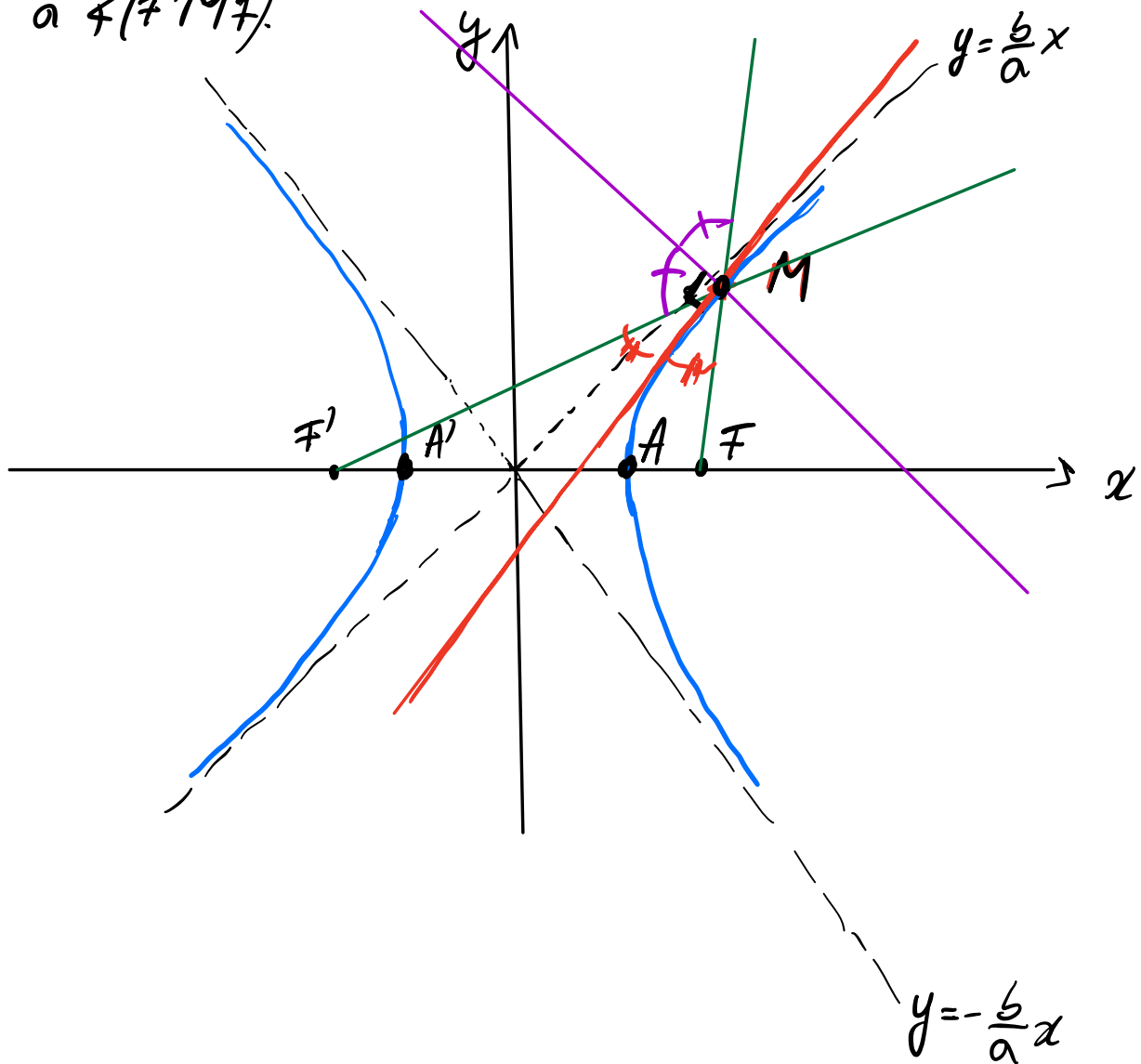
$$\Rightarrow m_d = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_M}{y_M}$$

$$m \perp d \Leftrightarrow m_m \cdot m_d = -1 \Leftrightarrow m_m = -\frac{a^2}{b^2} \frac{y_M}{x_M}$$

$$\Rightarrow m: y - y_M = -\frac{a^2}{b^2} \frac{y_M}{x_M} (x - x_M)$$

Teoremă (proprietatea optică a hiperbolei)

Tangenta și normala la $\mathcal{H}$ în $M \in \mathcal{H}$ orbiților sunt
bisectoarea interioară respectiv bisectoarea exterioară
a $\angle(F'MF)$.



Parabola

Definiție. În planul afin euclidian $(E_2, \mathcal{V}_2, \Phi)$ se consideră o dr. δ și un punct $F \notin \delta$. Parabola este locul geometric al punctelor din E_2 situate la egală distanță de punctul F și de dr. δ .

$$P = \{ P \in E_2 \mid \text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, \delta) \}$$

F s.m. Focusul parabolei, δ - directoarea parabolei.
Spunem că parabola are excentricitatea 1

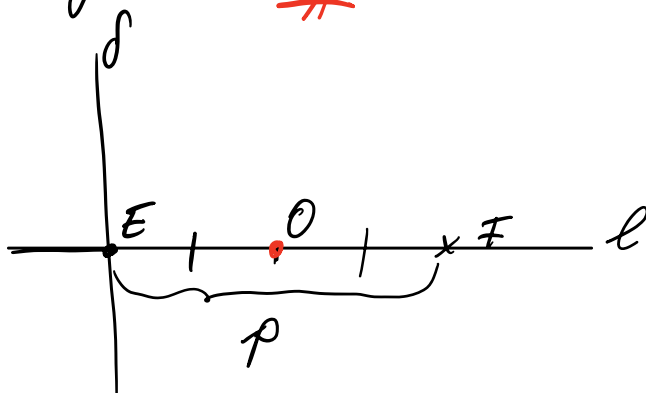
Pentru a vedea că $P \neq \emptyset$ facem urm. construcție:

$\rightarrow$ Fie l perpendiculara din F pe δ și E piciorul acesteia. Not. cu O mij. seg. (FE) . $O \in P$, iar O e.m. vârful parabolei.

$$\text{dist}(O, F) = \text{dist}(O, \delta)$$

$$\Downarrow O \in P$$

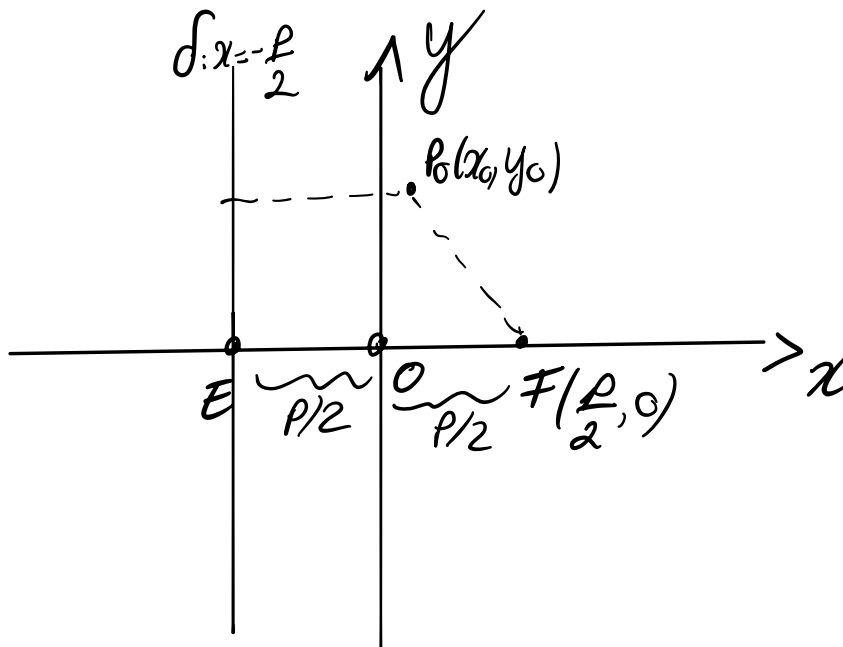
Fie $p = \text{dist}(F, \delta)$ = parametrul parabolei



$$\text{At. } d(O, F) = d(O, \delta) = \frac{p}{2}$$

Ecuațiile parabolei

Considerăm reperul cu originea O (mij. seg. (EF)),
semiaxa pozitivă $Ox = (OF)$ și $Oy \perp Ox$ orientată
a.î. să avem un k.o.p.



În raport cu acest reper $F(\frac{p}{2}, 0)$, $\delta: x = -\frac{p}{2}$

$$P(x, y) \in \mathcal{P} \Rightarrow d(P, F) = d(P, \delta)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + (y - 0)^2} = \frac{|x + \frac{p}{2}|}{\sqrt{1 + 0^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = |x + \frac{p}{2}| / 2$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow -2x \cdot \frac{p}{2} + y^2 = 2x \frac{p}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y^2 = 2px}$$

Reciproc, dacă $P(x, y)$ satisface $y^2 = 2px$, arătăm
că $P \in \mathcal{P} \Leftrightarrow d(P, F) = d(P, \ell)$.

$$\left. \begin{array}{l} F\left(\frac{p}{2}, 0\right) \\ P(x, y) \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, F) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \quad \left. \begin{array}{l} \\ y^2 = 2px \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d(P, F) = \sqrt{x^2 + \frac{p^2}{4} - xp + 2xp} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d(P, F) = \sqrt{x^2 + \frac{p^2}{4} + xp}$$

$$\Leftrightarrow d(P, F) = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{d(P, F)}_{=} = \left|x + \frac{p}{2}\right|$$

$$P(x, y) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, \delta) = \frac{|x + \frac{p}{2}|}{\sqrt{1}}$$

$$\delta: x = -\frac{p}{2} \Leftrightarrow x + \frac{p}{2} = 0 \quad \underline{\underline{d(P, \delta) = |x + \frac{p}{2}|}}$$

Rez. că $d(P, F) = d(P, \delta)$, deci $P \in \mathcal{P}$

Ec. canonică a parabolei: $y^2 = 2px$

$$\mathcal{P} = \{ P(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid y^2 = 2px \}$$

Observație Dacă $P(x, y) \in \mathcal{P}$, at. $x \geq 0$.

Ecuațiile explicite

$$x \geq 0; y^2 = 2px \Rightarrow \begin{cases} \text{Pt. } y \geq 0, \text{ obt. } y = \sqrt{2px} \\ \text{Pt. } y < 0, \text{ obt. } y = -\sqrt{2px} \end{cases}$$

Observație Dacă $P(x, y) \in \mathcal{P}$ at. $P'(x, -y) \in \mathcal{P}$, adică axa Ox este axă de simetrie pt. parabolă.

Considerăm $y(x) = \sqrt{2px}$, $x \geq 0$.

$$y(0) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \infty$$

$$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2px}} \cdot 2p = \frac{p}{\sqrt{2px}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{2x}} > 0, \forall x > 0$$

$$y''(x) = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{2}} \cdot (x^{-1/2})' = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-3/2} =$$

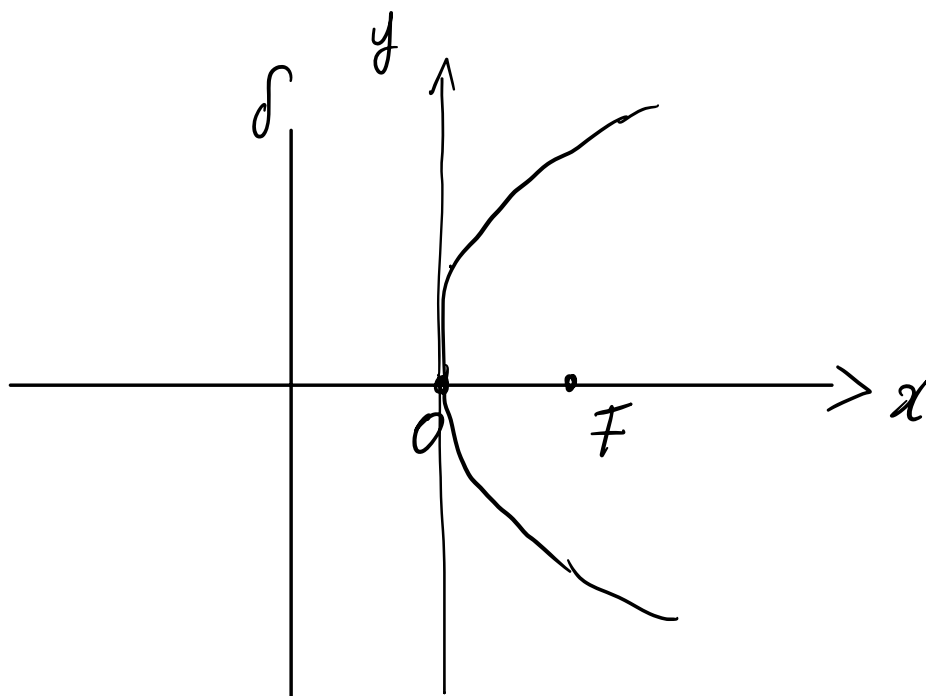
$$= -\frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{x^3}} < 0, \forall x > 0.$$

x	0				∞
y'	+	+	+	+	+
y''	-	-	-	-	-
y	0	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2px}}{x} = 0 = m$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2px} = \infty$$

$\Rightarrow$ nu avem
asimptotă
oblică.



O parametrizare simplă pt. parabola este urm.:

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \rightarrow \text{ecuațiile parametrice ale parabolei.}$$

Poziția relativă a unei drepte față de parabolă

Propoziție 1. Fie P o parabolă și d o dreaptă. Atunci avem una din următoarele posibilități:

- i) $d \cap P = \emptyset$, iar în acest caz d s.m. exterioară parabolei
- ii) $d \cap P = \{1 \text{ punct}\}$ și $d \parallel$ axa de simetrie a parabolei; iar în acest caz d s.m. recomtă parabolei cu direcția axei de simetrie
- iii) $d \cap P = \{1 \text{ punct}\}$ și $d \nparallel$ axa de simetrie, iar în acest caz d s.m. tangentă parabolei.
- iv) $d \cap P = \{2 \text{ puncte}\}$, iar în acest caz d s.m. recomtă parabolei.

Dem. I. $d \parallel Oy \Rightarrow d: x = \alpha$

$$d \cap P: \begin{cases} x = \alpha \\ y^2 = 2px \end{cases} \Rightarrow y^2 = 2p\alpha$$

I.1. Dacă $\alpha < 0 \Rightarrow d \cap P = \{\emptyset\} \Rightarrow d$ este exterioară

I.2. Dacă $\alpha = 0 \Rightarrow d \cap P = \{O(0,0)\} \Rightarrow d$ este tangentă
 $d \nparallel Ox$

I.3. Dacă $\alpha > 0 \Rightarrow d \cap P = \{2 \text{ puncte}\} \Rightarrow d$ este recomtă

Observație O dreaptă verticală este tangentă la parabolă dacă și numai dacă conține $O(0,0)$.

$$\text{II. } \boxed{d \nparallel Oy} \Rightarrow d: y = mx + n$$

$$d \cap P: \begin{cases} y = mx + n \\ y^2 = 2px \end{cases} \Rightarrow (mx + n)^2 = 2px$$

$$\text{II} \quad \underline{m^2 x^2 + 2(mn - p)x + n^2 = 0} \quad (*)$$

$$\text{II.1. Dacă } \underline{m=0} \Rightarrow d: y = n \Rightarrow d \parallel Ox$$

$$(*) \Leftrightarrow 2(-p) \cdot x + n^2 = 0$$

$$x = \frac{n^2}{2p}$$

Deci $d \cap P = \{1 \text{ punct}\}$, $d \parallel Ox \Rightarrow d$ are contă cu direcția axei de simetrie.

$$\text{II.2. Dacă } \underline{m \neq 0}:$$

$$\Delta = 4(mn - p)^2 - 4m^2 n^2$$

$$\Delta = 4(-2mnp + p^2)$$

$$\Delta = 4p(p - 2mn)$$

$$\text{II.2.1. } p < 2mn \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow d \cap P = \{\emptyset\} \Rightarrow d \text{ este exterioară}$$

$$\text{II.2.2. } p = 2mn \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow d \cap P = \{1 \text{ punct}\} \Rightarrow d \text{ este tangentă}$$

$$d \nparallel Ox$$

$$\text{II.2.3. } p > 2mn \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow d \cap P = \{2 \text{ puncte}\} \Rightarrow d \text{ are contă}$$

Observație. Dacă d este tangentă la P cu panta $m \neq 0$ at.
 $p = 2mm \Rightarrow m = \frac{p}{2m}$

$$d: y = mx + \frac{p}{2m}$$

Propoziție. Fie parabola de ecuație $y^2 = 2px$ și $M(x_M, y_M) \in P$.
 Atunci există o unică tangentă la P ce conține M , iar ec.
 ei este: $y \cdot y_M = p(x + x_M)$ (se obține prin deducere în M).

Dem. [I] Dacă $M = O(0,0)$, tang. la P în M este

$$d: x=0 \Leftrightarrow y \cdot 0 = p(x+0) \text{ (adine)}$$

[P. că $\exists d \nparallel Oy$ tang. la P în M :

$$\left. \begin{array}{l} d: y = mx + \frac{p}{2m} \\ M \in d \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 0 + \frac{p}{2m} \Leftrightarrow p = 0 \text{ (fals)}$$

Unica tang. la P în $O(0,0)$ este Oy .

(II) Dacă $M(x_M, y_M) \in P \setminus \{O(0,0)\}$, at. tang. la P în
 M nu poate fi $\parallel Oy$ sau $\parallel Ox$ și $x_M \neq 0, y_M \neq 0$

$$\left. \begin{array}{l} d: y = mx + \frac{p}{2m}, m \neq 0 \\ d: y - y_M = m(x - x_M) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{p}{2m} = \frac{y_M - mx_M}{2m} \Leftrightarrow$$

-662-

$$\rho = 2m y_M - 2m^2 x_M$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2x_M m^2 - 2y_M \cdot m + \rho = 0}_{\neq 0}$$

$$\Delta = 4y_M^2 - 8x_M \cdot \rho$$

$$\Delta = 4(y_M^2 - 2\rho x_M)$$

$$\Delta = 0$$

$$m = \frac{2y_M}{4x_M} = \frac{y_M}{2x_M}$$

$$\text{Deci } d: y = \frac{y_M}{2x_M} x + \frac{\rho}{2} \cdot \frac{2x_M}{y_M} \quad / \cdot y_M$$

$$d: y y_M = \frac{y_M^2}{2x_M} x + \rho \cdot x_M$$

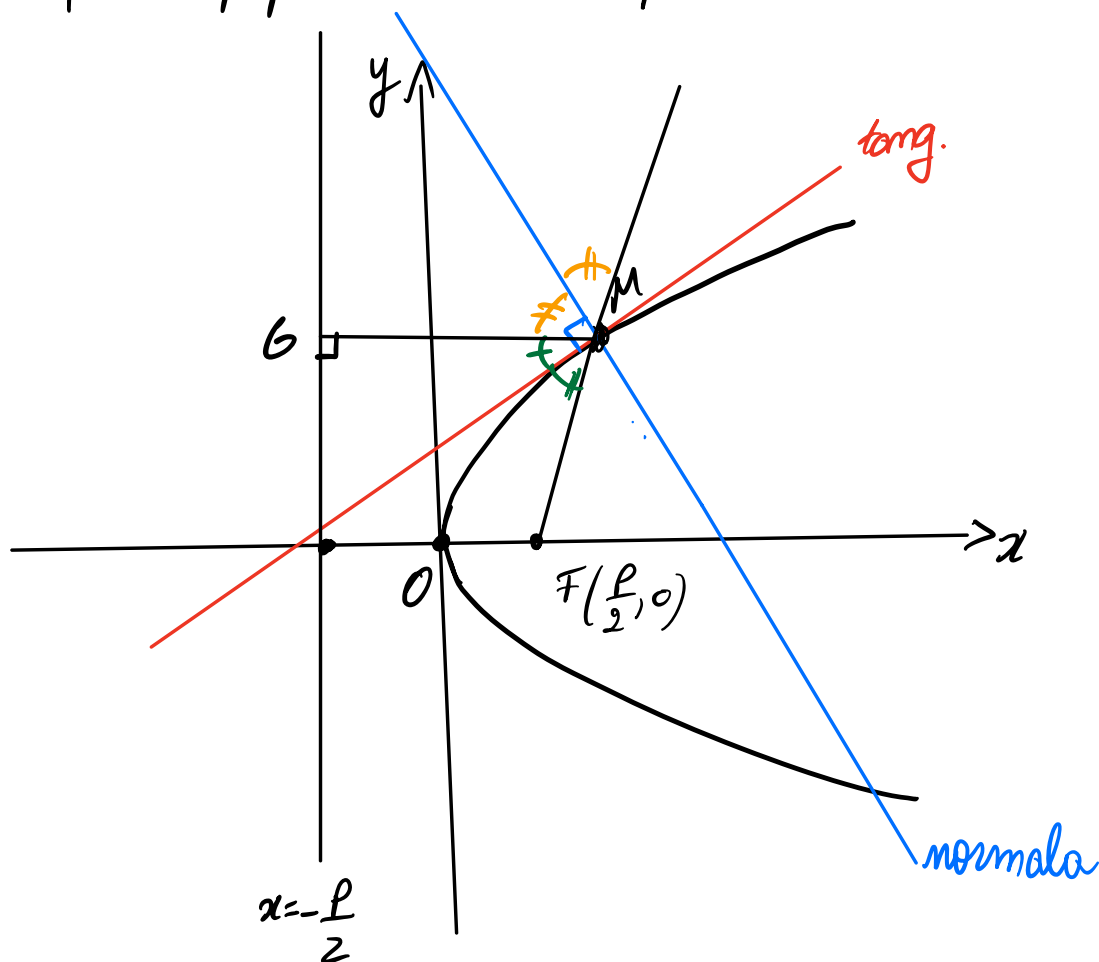
$$d: y \cdot y_M = \frac{2\rho x_M}{2x_M} x + \rho \cdot x_M$$

$$\underline{d: y \cdot y_M = \rho(x + x_M)}$$

Definiție. Normala la P în $M(x_M, y_M) \in P$ este dreapta perpendiculară pe tangenta la P în $M(x_M, y_M)$.

Teoremă (Proprietatea optică a parabolei).

Tangenta și normala la P într-un punct $M \in P$ sunt bisectoarea interioară și respectiv exterioară a unghiului $\widehat{FMG}$, unde G este piciorul perpendicularei din M pe directoare.



Definiția comună a elipsei, hiperbolei și parabolei:

Teoremă. Fie o dr. d , un punct F exterior acesteia și un nr. strict pozitiv e . Locul geometric al punctelor P din plan cu prop. că $\frac{d(P,F)}{d(P,d)} = e$ este:

- a) o hiperbolă, dacă $e > 1$
- b) o elipsă, dacă $e < 1$
- c) o parabolă, dacă $e = 1$.

Clasificarea isometrică a conicelor.

Definiție. O submulțime $\Gamma \subset \mathbb{E}_2$ s.m. conică în $\mathbb{E}_2$ (conică afină) dacă Γ este locul geometric al punctelor $M \in X$ ale căror coordonate (x, y) în raport cu un reper cartezian $R = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ verifică o ec. de tipul

$$\underline{H(M) := H(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0,}$$

unde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $a_{12} = a_{21}$, $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 > 0$

$$\text{Not. } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad a_{21} = a_{12}; \quad B = \begin{bmatrix} a_{10} & a_{20} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^t & B \\ B & a_{00} \end{bmatrix} \quad A \in S(2), \mathcal{D} \in S(3).$$

$$\text{Not. cu } I = \text{tracé } A = a_{11} + a_{22}$$

$$J = \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

$$\Delta = \det \mathcal{D}.$$

$$M(x,y) \in \Gamma \Leftrightarrow H(X) = H(x,y) = 0$$

$$\Leftrightarrow {}^tX \cdot A \cdot X + 2BX + a_{00} = 0$$

$$\text{unde } X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$${}^tX \cdot A = [x \ y]_{1 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2} = [xa_{11} + ya_{12} \quad xa_{12} + ya_{22}]_{1 \times 2}$$

$${}^tX \cdot A \cdot X = [xa_{11} + ya_{12} \quad xa_{12} + ya_{22}]_{1 \times 2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

$$= [x^2 a_{11} + 2a_{12}xy + y^2 a_{22}]_{1 \times 1}$$

$$BX = [a_{10} \ a_{20}]_{1 \times 2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2 \times 1} = [a_{10}x + a_{20}y]_{1 \times 1}$$

$${}^tXAX + 2BX + a_{00} = 0 \Leftrightarrow a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$$

Teoremă. Proprietatea unei submulțimi $\Gamma \subset \mathbb{E}_2$ de a fi conică nu depinde de reperul cartezian în raport cu care i s-a dat ecuația.

Dem. Fie $R' = \{O'; \vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$ un alt reper cartezian în $\mathbb{E}_2$.

Schimbarea de repere induce schimbarea de coordonate

$$X = SX' + S_0 \quad -[67]-$$

Im rapport au R' , l'anneau quotient :

$${}^t(SX' + S_0) \cdot A \cdot (SX' + S_0) + 2B(SX' + S_0) + a_{00} = 0$$

$$\Leftrightarrow ({}^tX' \cdot {}^tS + {}^tS_0) \cdot A \cdot (SX' + S_0) + 2B(SX' + S_0) + a_{00} = 0$$

$$\Leftrightarrow {}^tX' \cdot {}^tS \cdot A \cdot S \cdot X' + \underbrace{{}^tX' \cdot {}^tS \cdot A \cdot S_0 + {}^tS_0 \cdot A \cdot S \cdot X'} + {}^tS_0 \cdot A \cdot S_0 + 2BSX' + 2BS_0 + a_{00} = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \underbrace{{}^tX'}_{1 \times 2} \cdot \underbrace{{}^tS}_{2 \times 2} \cdot \underbrace{A}_{2 \times 2} \cdot \underbrace{S_0}_{2 \times 1} \in \mathcal{M}_{1 \times 1}(R) \Rightarrow \underbrace{{}^tX' \cdot {}^tS \cdot A \cdot S_0}_{\substack{\text{1x2} \quad \text{1x2} \\ \text{1x2} \quad \text{1x1}}} \\ \parallel \\ {}^t({}^tX' \cdot {}^tS \cdot A \cdot S_0) \\ \parallel \\ {}^tS_0 \cdot {}^tA \cdot S \cdot X' \\ \parallel \text{AES}(2) \\ {}^tS_0 \cdot A \cdot S \cdot X' \end{array} \right]$$

$$\Leftrightarrow {}^tX' \cdot {}^tS \cdot A \cdot S \cdot X' + {}^tS_0 \cdot A \cdot S \cdot X' + {}^tS_0 \cdot A \cdot S \cdot X' + {}^tS_0 \cdot A \cdot S_0 + 2BSX' + 2BS_0 + a_{00} = 0$$

$$\Leftrightarrow {}^tX' \cdot {}^tS \cdot A \cdot S \cdot X' + 2{}^tS_0 \cdot A \cdot S \cdot X' + 2BSX' + {}^tS_0 \cdot A \cdot S_0 + 2BS_0 + a_{00} = 0$$

$$\Leftrightarrow {}^tX' \cdot {}^tS \cdot A \cdot S \cdot X' + 2({}^tS_0 \cdot A \cdot S + BS)X' + H(S_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{{}^tX' \cdot A' \cdot X' + 2B'X' + a_{00}' = 0},$$

- 668 -

unde

$$\begin{cases} A' = {}^t S \cdot A \cdot S \in S(2) \\ B' = {}^t S_0 A S + B S \in \mathcal{M}_{1 \times 2}(\mathbb{R}) \\ a'_{00} = H(S_0) \end{cases}$$

P.p. $S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{21} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow A' = \begin{bmatrix} s_{11}a_{11} + s_{21}a_{12} & s_{11}a_{12} + s_{21}a_{22} \\ s_{12}a_{11} + s_{22}a_{12} & s_{12}a_{12} + s_{22}a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A' = \begin{bmatrix} s_{11}(s_{11}a_{11} + s_{21}a_{12}) + s_{21}(s_{11}a_{12} + s_{21}a_{22}) & s_{12}(s_{11}a_{11} + s_{21}a_{12}) + s_{22}(s_{11}a_{12} + s_{21}a_{22}) \\ s_{11}(s_{12}a_{11} + s_{22}a_{12}) + s_{21}(s_{12}a_{12} + s_{22}a_{22}) & s_{12}(s_{12}a_{11} + s_{22}a_{12}) + s_{22}(s_{12}a_{12} + s_{22}a_{22}) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A' = \begin{bmatrix} s_{11}^2 a_{11} + 2s_{11}s_{21}a_{12} + s_{21}^2 a_{22} & s_{11}s_{12}a_{11} + (s_{11}s_{22} + s_{12}s_{21})a_{12} + s_{22}s_{21}a_{22} \\ s_{11}s_{12}a_{11} + (s_{11}s_{22} + s_{12}s_{21})a_{12} + s_{22}s_{21}a_{22} & s_{12}^2 a_{11} + 2s_{12}s_{22}a_{12} + s_{22}^2 a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{A' \in S(2)}$$

$$\text{Fie } \mathcal{D}' = \begin{bmatrix} A' & {}^t B' \\ B' & a'_{00} \end{bmatrix} \text{ si } S' = \begin{bmatrix} S & S_0 \\ 0_{1 \times 2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{01} \\ s_{21} & s_{22} & s_{02} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

unde $S_0 = \begin{pmatrix} s_{01} \\ s_{02} \end{pmatrix}$. Se arată că $\mathcal{D}' = {}^t S' \mathcal{D} S'$ și $\mathcal{D}' \in S(3)$

Obs. că $\det S' = \det S$.

Observație $A' = {}^t S \cdot A \cdot S$ / $\det A' = \det A \cdot (\det S)^2$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{rang } A' = \text{rang } A \text{ (pt. c. } S \text{ este neregulară)} \end{cases}$

$D' = {}^t S' \cdot D \cdot S'$ / $\det D' = \det D \cdot (\det S')^2$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{rang } D' = \text{rang } D \text{ (pt. c. } S' \text{ este neregulară)} \end{cases}$

Deci notăm $\delta = \det A$, $\Delta = \det D$, $\delta' = \det A'$, $\Delta' = \det D'$,
 obs. că dacă $\delta \neq 0 \Rightarrow \delta' \neq 0$ și $\frac{\Delta}{\delta} = \frac{\Delta'}{\delta'}$

În concluzie: Rangurile matricelor A și D nu se schimbă la schimbări de repere carteziane. Dacă $\delta \neq 0$, atunci și $\frac{\Delta}{\delta}$ rămâne același la schimbări de repere carteziane.

Not $\text{rang } A = r$, $\text{rang } D = p$
 Spunem că r, p și $\frac{\Delta}{\delta}$ sunt invariante afine ai conicii?

O conică n.m. degenerată dacă $\text{rang } D \leq 2$.

Obs. că δ și Δ nu sunt invariante afine ai conicii.

Acum, dacă considerăm reperele ortonormate,

$R = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2\} \rightsquigarrow R = \{O; \bar{i}, \bar{j}\}$

$R' = \{O; \bar{e}'_1, \bar{e}'_2\} \rightsquigarrow R' = \{O'; \bar{i}', \bar{j}'\}$

- C70 -

$$\{\bar{i}, \bar{j}\} \xrightarrow{S} \{\bar{i}', \bar{j}'\}, \quad S \in O(2) \Leftrightarrow {}^t S = S^{-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \det S = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} \det A = \det A' \Rightarrow \underline{\delta = \delta'} \\ \det D = \det D' \Rightarrow \underline{\Delta = \Delta'} \end{cases}$$

$$A' = {}^t S A S \Leftrightarrow A' = S^{-1} \cdot A \cdot S \Rightarrow P_A(\lambda) = P_{A'}(\lambda)$$

(polinoamele caracteristice)

$$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_2) = \det(A' - \lambda I_2) \Leftrightarrow \lambda^2 - I\lambda + \delta = \lambda^2 - I'\lambda + \delta', \forall \lambda$$

$$\Leftrightarrow \underline{I = I'} (= \text{tracé } A = \text{tracé } A') \text{ și } \underline{\delta = \delta'}$$

În concluzie: I, δ, Δ sunt invarianti ortogonali ai conicilor Γ .

○ Dacă $S_0 = O$ (reperul are ca origine originea) at. $S' = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este ortogonală și $D' = S'^{-1} \cdot D \cdot S' \Rightarrow \det(D - \lambda I_3) = \det(D' - \lambda I_3)$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + \text{tracé } D \lambda^2 - \Delta_1 \lambda + \det D = -\lambda^3 + \text{tracé } D' \lambda^2 - \Delta_1' \lambda + \det D'$$

$$\Leftrightarrow \lambda(\Delta_1 - \text{tracé } D \cdot \lambda) = \lambda(\Delta_1' - \text{tracé } D' \cdot \lambda), \forall \lambda \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\Delta_1 = \Delta_1'} \\ \text{tracé } D = \text{tracé } D' \end{cases}$$

$$\text{unde } \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{10} \\ a_{10} & a_{00} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{20} \\ a_{20} & a_{00} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \text{tracé } D = \\ \text{tracé } D' \end{matrix}$$

adică suma minorilor diagonale de ordin 2 ai lui

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{bmatrix}; \quad \Delta_1' = \text{suma minorilor diag. de ordin 2 ai lui } D'$$

Rez. că $\Delta_1 = \Delta_1'$, deci Δ_1 este un invariant centro-ortogonal

al lui Γ , adică rămâne neschimbat la o schimbare de reper orton., când originea rămâne aceeași. Dacă în plus

(4-6) $\delta = \Delta = 0$, at. Δ_1 este chiar un invariant ortog. al conicilor.

În continuare vom clasifica conicele spațiului afîn euclidian (E_2, V_2, Φ) în funcție de invariantii ortogonali introduși.

Teorema de clasificare isometrică a conicelor

Nr.	δ	Δ	$I\Delta$	Δ_1	Genul conicei	Tipul conicei	Denumirea conicei
1	>0	$\neq 0$	<0		eliptic	nedegenerat	elipsă ✓
2	>0	$\neq 0$	>0		eliptic	nedegenerat	elipsă imaginară
3	>0	0			eliptic	degenerat	punct dublu
4	<0	$\neq 0$			hiperbolic	nedegenerat	hiperbola ✓
5	<0	0			hiperbolic	degenerat	drepte concurente
6	0	$\neq 0$			parabolic	nedegenerat	parabolă ✓
7	0	0		<0	parabolic	degenerat	drepte paralele
8	0	0		0	parabolic	degenerat	drepte dublu
9	0	0		>0	parabolic	degenerat	drepte imaginare paralele

Există doar următoarele tipuri de conice:

I de tip eliptic ($\delta > 0$)

→ nedegenerată ($\Delta \neq 0$): 1) elipsă (dacă $I \cdot \Delta < 0$)
2) elipsă imaginară (dacă $I \cdot \Delta > 0$)

→ degenerată ($\Delta = 0$): 3) punct dublu

II de tip hiperbolic ($\delta < 0$)

→ nedegenerată ($\Delta \neq 0$): 4) hiperbolă

→ degenerată ($\Delta = 0$): 5) drepte concurente

III de tip parabolic ($\delta = 0$)

→ nedegenerată ($\Delta \neq 0$): 6) parabolă

→ degenerată ($\Delta = 0$): 7) drepte paralele ($\Delta_1 < 0$)

8) dreaptă dublă ($\Delta_1 = 0$)

9) drepte imaginare paralele ($\Delta_1 > 0$)

Dem:

Vom căuta un reper ortonormat, pe care îl vom numi canonic, în raport cu care ecuația conicei Γ să fie una de tipul următor:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (elipsă)}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (hiperbolă)}$$

$$y^2 - 2px = 0 \text{ (parabolă)}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{ (elipsa imaginară)}$$

$$(ax+by+c)(a'x+b'y+c')=0 \text{ (o pereche de drepte)}$$

$$x^2+y^2=0 \text{ (punct dublu)} \Rightarrow x=y=0.$$

$$x^2=-1 \text{ (drepte imaginare paralele)}$$

Fie $R = \{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ un reper ortonormat. Fără a reduce generalitatea, putem pp. că R reper o.p. În raport cu acest reper, Γ are ecuația:

$$(1) \Gamma: H(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$$

$$\Gamma: {}^tX \cdot A \cdot X + 2BX + a_{00} = 0, \text{ unde}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \in S(2); \quad B = (a_{10} \quad a_{20}) \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$$

Cum $A \in S(2)$ rez. că $\exists B' = \{\vec{i}', \vec{j}'\}$ b. ort. formată din vectorii proprii ai lui A a.i.

$$A' = {}^tS \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \text{ unde } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ sunt valorile}$$

proprii ale lui A , iar $S = M_{B, B'} \in SO(2)$ (simetrică și ortog.)
(diagonalizarea matricelor simetrice)

$$\left[\begin{array}{l} \text{- Valorile proprii sunt rădăcinile polinomului caracteristic} \\ P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - I \cdot \lambda + \delta, \quad \underline{I = \lambda_1 + \lambda_2}, \quad \underline{\delta = \lambda_1 \lambda_2} \\ \text{- Vectorii proprii ai lui } A \text{ cresp. val. proprii } \lambda \in \mathbb{R}: \\ (A - \lambda I_2)(X) = 0 \Rightarrow A(X) = \lambda X \end{array} \right]$$

Not. $\vec{i}' \in \mathcal{U}(\lambda_1), \vec{j}' \in \mathcal{U}(\lambda_2)$.

Vectorii $\vec{i}', \vec{j}'$ s.m. direcțiile principale ale lui Γ .

Dacă $\underline{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda}$, atunci alegem o bază oarecare în $\mathcal{U}(\lambda)$ pe care o ortonormăm.

Notăm vectorii proprii ai lui A cu $\{\bar{x}', \bar{y}'\}$ (în aceeași ordine) ad. $\{\bar{x}', \bar{y}'\} \otimes \{\bar{x}, \bar{y}\}$.

Continuăm prin a considera rotatia de rapere

$$1) \quad R = \{O; \bar{x}, \bar{y}\} \mapsto R' = \{O; \bar{x}', \bar{y}'\}$$

Schimbarea de coordonate este dată de

$$X = SX' ; \quad S_0 = O_{2 \times 1}.$$

În raport cu R' , Γ are ec:

$$\Gamma: \quad H(x', y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a'_{00} = 0$$

II

$$\Gamma: \quad H(X') = {}^t X' A' X' + 2B' X' + a'_{00} = 0,$$

(2)

$$\text{unde } A' = {}^t S A S = S^{-1} A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

$$B' = {}^t S_0 A S + B S \quad \begin{matrix} S_0 = O \\ \Leftrightarrow \end{matrix} B' = B S$$

$$\underline{a'_{00}} = H(S_0) = {}^t S_0 A S_0 + 2B S_0 + a_{00} = \underline{a_{00}}$$

$$\mathcal{D}' = \begin{pmatrix} A' & {}^t B' \\ B' & a'_{00} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & a'_{10} \\ 0 & \lambda_2 & a'_{20} \\ a'_{10} & a'_{20} & a'_{00} \end{pmatrix}$$

$$\det \mathcal{D}' = \lambda_1 (\lambda_2 a'_{00} - a_{20}'^2) + a'_{10} (-\lambda_2 a'_{10})$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 a_{00} - \lambda_1 a_{20}'^2 - \lambda_2 a_{10}'^2$$

$$\text{II } \det \mathcal{D} = \det \mathcal{D}'$$

$$\Delta = \lambda_1 \lambda_2 a_{00} - \lambda_1 a_{20}'^2 - \lambda_2 a_{10}'^2 \quad (\Delta \text{ este invariant ortog.)}$$

$$\begin{cases} \det A' = \lambda_1 \lambda_2 \\ \text{trace } A' = \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta = \lambda_1 \lambda_2 \\ I = \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \quad (\delta, I \text{ sunt invariante ortog.})$$

$$\Delta = \delta \cdot a_{00} - \lambda_1 a_{20}'^2 - \lambda_2 a_{10}'^2 \quad (*)$$

I Dacă $\delta > 0$: $\lambda_1 \lambda_2 > 0 \Leftrightarrow \text{sgn}(\lambda_1) = \text{sgn}(\lambda_2)$

$$Q(x) = H(x', y') = \lambda_1 \left(x' + \frac{a_{10}'}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{a_{20}'}{\lambda_2} \right)^2 - \frac{a_{10}'^2}{\lambda_1} - \frac{a_{20}'^2}{\lambda_2} + a_{00} = 0$$

Dim (*) Obs. că $\frac{\Delta}{\delta} = a_{00} - \frac{a_{20}'^2}{\lambda_2} - \frac{a_{10}'^2}{\lambda_1}$

Deci:

$$H(x', y') = \lambda_1 \left(x' + \frac{a_{10}'}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{a_{20}'}{\lambda_2} \right)^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \quad (3)$$

Continuăm prin a considera schimbarea de repere pentru care avem schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{a_{10}'}{\lambda_1} \\ y'' = y' + \frac{a_{20}'}{\lambda_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x'' - \frac{a_{10}'}{\lambda_1} \\ y' = y'' - \frac{a_{20}'}{\lambda_2} \end{cases}$$

$$X' = S' X'' + S_0' \Rightarrow S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad S_0' = \begin{pmatrix} -\frac{a_{10}'}{\lambda_1} \\ -\frac{a_{20}'}{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

$S' = I_2 \Rightarrow$ baza rămâne neschimbată -C76-

Deci, avem o translație de repere
 2) $R' = \{O; \bar{i}', \bar{j}'\} \longrightarrow R'' = \{C; \bar{i}'', \bar{j}''\},$

coordonatele lui C în raport cu R' sunt: $-\frac{a_{10}'}{\lambda_1} \bar{i}' - \frac{a_{20}'}{\lambda_2} \bar{j}'$

$\frac{\Delta}{\delta}$ este invariant ortogonal, deci conica va avea ec. urm. în raport cu R'' :

$$(3) \Rightarrow H(x'', y'') = \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \quad (4)$$

I.1 $\Delta = 0$ (conica este degenerată)

$$(4) \Rightarrow H(x'', y'') = \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = 0 \quad (5) \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} (4) \\ (5) \end{matrix}} \right\} \Rightarrow x'' = y'' = 0 \Rightarrow$$

Cum $\text{sgn}(\lambda_1) = \text{sgn}(\lambda_2)$.

$\Rightarrow \Gamma = \{C(0,0)_{R''}\}$ În acest caz, spunem că Γ este un punct dublu
 "originea reperului R'' "

I.2 $\Delta \neq 0$ (conica este nedegenerată) $\Rightarrow \frac{\Delta}{\delta} \neq 0$ și at.

$$(4) \Rightarrow H(x'', y'') = \frac{x''^2}{\frac{\Delta}{\delta} \cdot \frac{1}{\lambda_1}} + \frac{y''^2}{\frac{\Delta}{\delta} \cdot \frac{1}{\lambda_2}} + 1 = 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x''^2}{-\frac{\Delta}{\delta \cdot \lambda_1}} + \frac{y''^2}{-\frac{\Delta}{\delta \cdot \lambda_2}} - 1 = 0$$

$$\text{Cum } \begin{cases} \text{sgn}(\lambda_1) = \text{sgn}(\lambda_2) \\ \delta > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{sgn}\left(-\frac{\Delta}{\delta\lambda_1}\right) = \text{sgn}\left(-\frac{\Delta}{\delta\lambda_2}\right) = \text{sgn}\left(-\frac{\Delta}{\lambda_1}\right) = \text{sgn}\left(-\frac{\Delta}{\lambda_2}\right)$$

$$\text{Cum } \text{sgn}(\lambda_1) = \text{sgn}(\lambda_2) \Rightarrow \text{sgn}(\lambda_1 + \lambda_2) = \text{sgn}(\lambda_1) = \text{sgn}(\lambda_2) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \text{sgn}(I) &= \text{sgn}\left(\frac{1}{\lambda_1}\right) = \text{sgn}\left(\frac{1}{\lambda_2}\right) \Rightarrow \\ \text{sgn}(-\Delta) \cdot \text{sgn}(I) &= \text{sgn}(-\Delta) \cdot \text{sgn}\left(\frac{1}{\lambda_i}\right) \Leftrightarrow \\ \text{sgn}(-I\Delta) &= \text{sgn}\left(-\frac{\Delta}{\lambda_i}\right), i=\overline{1,2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{I.2.A}} \text{ Dacă } \boxed{I\Delta < 0} \Rightarrow -\frac{\Delta}{\lambda_i} > 0, i=\overline{1,2} \left. \vphantom{\begin{aligned} &\text{sgn}(-I\Delta) = \text{sgn}\left(-\frac{\Delta}{\lambda_i}\right) \\ &\text{sgn}(-I\Delta) = \text{sgn}\left(-\frac{\Delta}{\lambda_i}\right) \end{aligned}} \right\} \Rightarrow \Gamma \text{ este o elipsă}$$

$$H(x'', y'') = \frac{x''^2}{-\frac{\Delta}{\delta\lambda_1}} + \frac{y''^2}{-\frac{\Delta}{\delta\lambda_2}} - 1 = 0$$

$$\boxed{\text{I.2.B}} \text{ Dacă } \boxed{I\Delta > 0} \Rightarrow -\frac{\Delta}{\lambda_i} < 0, i=\overline{1,2} \Rightarrow \Gamma \neq \emptyset. \text{ În acest caz, } \\ \text{ştim că } \Gamma \text{ este elipsa imaginară}$$

$$\boxed{\text{II}} \text{ Dacă } \boxed{\delta < 0} \Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 < 0 \Leftrightarrow \text{sgn}(\lambda_1) = -\text{sgn}(\lambda_2)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \neq 0 \text{ şi } \lambda_2 \neq 0$$

$$(2) \Rightarrow H(x', y') = \lambda_1 \left(x' + \frac{a_{10}'}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{a_{20}'}{\lambda_2}\right)^2 - \frac{a_{10}'^2}{\lambda_1} - \frac{a_{20}'^2}{\lambda_2} + a_{00} = 0$$

$$\text{Din (*) Obs. că } \frac{\Delta}{\delta} = a_{00} - \frac{a_{20}'^2}{\lambda_2} - \frac{a_{10}'^2}{\lambda_1}$$

Deci

$$H(x', y') = \lambda_1 \left(x' + \frac{a_{10}'}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{a_{20}'}{\lambda_2}\right)^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \quad (6)$$

-C78-

Continuăm prin a considera schimbarea de repere pentru care avem schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{a_{10}'}{\lambda_1} \\ y'' = y' + \frac{a_{20}'}{\lambda_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x'' - \frac{a_{10}'}{\lambda_1} \\ y' = y'' - \frac{a_{20}'}{\lambda_2} \end{cases}$$

$$X' = S'X'' + S_0' \Rightarrow S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad S_0' = \begin{pmatrix} -\frac{a_{10}'}{\lambda_1} \\ -\frac{a_{20}'}{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

$S' = I_2 \Rightarrow$ baza rămâne neschimbată

Deci, avem o translație de repere

2) $\underline{R' = \{O; \vec{i}', \vec{j}'\} \longrightarrow R'' = \{C; \vec{i}'', \vec{j}''\}}$

coordonatele lui C în raport cu R' sunt: $-\frac{a_{10}'}{\lambda_1}$ și $-\frac{a_{20}'}{\lambda_2}$

(6) $\Leftrightarrow H(x'', y'') = \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$ (7)

II.1 $\Delta = 0$ (conica este degenerată)

(7) $\Leftrightarrow \underline{H(x'', y'') = \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = 0}$ (8) $\} \Rightarrow$

Cum $\text{sgn}(\lambda_1) = -\text{sgn}(\lambda_2)$.

$\Rightarrow y''^2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} x''^2 \Leftrightarrow y'' = \pm \sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \cdot x'' \Rightarrow \Gamma = \{d_1, d_2\}$, unde

$d_{1,2}: y'' = \pm \sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} x'' \rightarrow$ două drepte concurente ce trec prin C .
 -C79- originea noului x''

I.2 $\Delta \neq 0$ (conică este nedegenerată) $\Rightarrow \frac{\Delta}{\delta} \neq 0$

$$(7) \Leftrightarrow \frac{x'^2}{-\frac{\Delta}{\delta \lambda_1}} + \frac{y'^2}{-\frac{\Delta}{\delta \lambda_2}} = 1$$

Cum $\text{sgn}(\lambda_1) = -\text{sgn}(\lambda_2) \Rightarrow \text{sgn}\left(-\frac{\Delta}{\delta \lambda_1}\right) = -\text{sgn}\left(-\frac{\Delta}{\delta \lambda_2}\right) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \Gamma$ este o hiperbola

III Dacă $\delta = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ sau $\lambda_2 = 0$

○ Dacă $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, at. $I = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0 \\ I = a_{11} + a_{22} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{22} = -a_{11} \\ -a_{11}^2 - a_{12}^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{22} = -a_{11} \\ a_{11} = a_{12} = 0 \end{cases} \Rightarrow a_{11} = a_{22} = 0 = a_{12} \text{ (fals)}$$

Deci λ_1 și λ_2 nu pot fi simultan nule.

P.r. că $\lambda_1 = 0$. Atunci $\lambda_2 \neq 0$ și $I = \lambda_2 \neq 0$. Atunci:

$$(2) \Leftrightarrow H(x', y') = \lambda_2 y'^2 + 2a_{10}' x' + 2a_{20}' y' + a_{00}' = 0$$

$$\text{I} \quad \lambda_2 \left(y' + \frac{a_{20}'}{\lambda_2} \right)^2 + 2a_{10}' x' - \frac{a_{20}'^2}{\lambda_2} + a_{00}' = 0$$

$$\text{II} \quad I \left(y' + \frac{a_{20}'}{I} \right)^2 + 2a_{10}' x' - \frac{a_{20}'^2}{I} + a_{00}' = 0 \quad (9) \quad -C_{80}$$

$$\text{În cazul acesta, (*)} \Leftrightarrow \underline{\Delta} = -\lambda_2 a_{10}'^2 = -\underline{I} \cdot a_{10}'^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{10}'^2 = -\frac{\underline{\Delta}}{\underline{I}}$$

○ Rotatia de repere pe care am făcut-o la început

$$R = \{O; \vec{i}, \vec{j}\} \mapsto R' = \{O; \vec{i}', \vec{j}'\}$$

este o schimbare cardio-ortogonală de repere și atunci și Δ_1 este invariant la această schimbare.

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{pmatrix}; D' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{10}' \\ 0 & \lambda_2 & a_{20}' \\ a_{10}' & a_{20}' & a_{00} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{10}' \\ a_{10}' & a_{00} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_2 & a_{20}' \\ a_{20}' & a_{00} \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\Delta_1 = -a_{10}'^2 - a_{20}'^2 + \lambda_2 a_{00}}{a_{10}'^2 = -\frac{\underline{\Delta}}{\underline{I}}, \lambda_2 = \underline{I}} \quad \int \Rightarrow \Delta_1 = \frac{\underline{\Delta}}{\underline{I}} - a_{20}'^2 + \underline{I} \cdot a_{00} \quad / : \underline{I} \neq 0$$

$$\Rightarrow a_{00} - \frac{a_{20}'^2}{\underline{I}} = \frac{\Delta_1}{\underline{I}} - \frac{\underline{\Delta}}{\underline{I}^2}$$

Atunci

$$(9) \Leftrightarrow \underline{I} \left(y' + \frac{a_{20}'}{\underline{I}} \right)^2 + 2a_{10}'x' + \frac{\Delta_1}{\underline{I}} - \frac{\underline{\Delta}}{\underline{I}^2} = 0 \quad / : \underline{I} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(y' + \frac{a_{20}'}{I}\right)^2 + \frac{2a_{10}'}{I}x' + \frac{\Delta_1}{I^2} - \frac{\Delta}{I^3} = 0 \quad (10)$$

III.1 $\Delta = 0$ (conica este degenerată)

$$(10) \Leftrightarrow \left(y' + \frac{a_{20}'}{I}\right)^2 + \frac{2a_{10}'}{I}x' + \frac{\Delta_1}{I^2} = 0 \Leftrightarrow \left(y' + \frac{a_{20}'}{I}\right)^2 + \frac{\Delta_1}{I^2} = 0 \quad (11)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cum } a_{10}'^2 = -\frac{\Delta}{I} \\ \Delta = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a_{10}' = 0$$

III.1.A Dacă $\Delta_1 < 0$, at.

$$(11) \Leftrightarrow \left(y' + \frac{a_{20}'}{I}\right)^2 = -\frac{\Delta_1}{I^2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y' + \frac{a_{20}'}{I} = \pm \sqrt{-\frac{\Delta_1}{I^2}} \Leftrightarrow y' = \pm \sqrt{-\frac{\Delta_1}{I^2}} - \frac{a_{20}'}{I} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma = \{d_1, d_2\}, \quad d_{1,2}: y' = \pm \sqrt{-\frac{\Delta_1}{I^2}} - \frac{a_{20}'}{I} \leadsto \text{duete paralele cu axa } Ox'$$

III.1.B Dacă $\Delta_1 = 0$, at.

$$(11) \Leftrightarrow \left(y' + \frac{a_{20}'}{I}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{a_{20}'}{I} \Rightarrow \Gamma = \{d\}$$

$\Rightarrow \Gamma$ este o dr. dubla de ec. (în raport cu R'): $y' = -\frac{a_{20}'}{I}$

III.1.C Dacă $\Delta_1 > 0$, at. din (11) $\Rightarrow \Gamma = \emptyset$.

În acest caz, spunem că Γ e formată din duete paralele imaginare.

III.2 $\Delta \neq 0$ (conica este nedegenerată)

Cum $a_{10}'^2 = -\frac{\Delta}{I} \Rightarrow \underline{a_{10}' \neq 0}$ și at. ec. (10) $\Rightarrow$

$$\left(y' + \frac{a_{20}'}{I}\right)^2 + \frac{2a_{10}'}{I} \left(x' + \frac{\Delta_1 I - \Delta}{I^2 \cdot 2a_{10}'}\right) = 0 \quad (12)$$

Considerăm schimbarea de repere

$$R' = \{O; \vec{i}', \vec{j}'\} \mapsto R'' = ?$$

a.d. schimbarea de coordonate să fie

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{\Delta_1 I - \Delta}{I^2 \cdot 2a_{10}'} \\ y'' = y' + \frac{a_{20}'}{I} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x'' - \frac{\Delta_1 I - \Delta}{I^2 \cdot 2a_{10}'} \\ y' = y'' - \frac{a_{20}'}{I} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; S_0 = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta_1 I - \Delta}{I^2 \cdot 2a_{10}'} \\ -\frac{a_{20}'}{I} \end{pmatrix}, \det S = 1 > 0$$

2)) Deci schimbarea de repere este o translație de repere

$$R' = \{O; \vec{i}', \vec{j}'\} \mapsto R'' = \{V; \vec{i}', \vec{j}'\}$$

unde V are coordonatele în raport cu R' : $\begin{pmatrix} -\frac{\Delta_1 I - \Delta}{I^2 \cdot 2a_{10}'} \\ -\frac{a_{20}'}{I} \end{pmatrix}$ și $-\frac{a_{20}'}{I}$

În raport cu R'' avem:

$$(12) \Leftrightarrow H(x'', y'') = y''^2 + \frac{2a_{10}'}{I} x'' = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Cum} \\ a_{10}'^2 = -\frac{\Delta}{I} \Rightarrow a_{10}' = \pm \sqrt{\frac{-\Delta}{I}} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$y''^2 \pm \frac{2}{I} \sqrt{\frac{-\Delta}{I}} \cdot x'' = 0 \Leftrightarrow$$

$$y''^2 \pm 2 \sqrt{\frac{-\Delta}{I^3}} x'' = 0 \quad \left. \right\} \Rightarrow \underline{y''^2 \pm 2\rho x'' = 0}$$

$$\text{Not. } \rho = \sqrt{\frac{-\Delta}{I^3}}$$

$\Rightarrow$ este o parabolă
cu vârful V

Observație 1) Ec. canonică a unei conice nedegenerate de tip eliptic sau hiperbolic ($\delta \neq 0, \Delta \neq 0$), este dată de ec:

$$\frac{x^2}{\frac{-\Delta}{\lambda_1 \delta}} + \frac{y^2}{\frac{-\Delta}{\lambda_2 \delta}} - 1 = 0$$

2) Ec. canonică a unei conice nedegenerate de tip parabolic ($\delta = 0, \Delta \neq 0$), este dată de ec:

$$y^2 = 2 \sqrt{\frac{-\Delta}{I^3}} x$$

Teoremă. Fie $R = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ un reper ortonormat din $(E_2, \mathcal{V}_2, \Phi)$. Fie conica Γ dată prin ec. $H(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$,
 Fie $M(x_0, y_0) \in \Gamma$. Atunci ec. tangentei la Γ ce trece prin M are ecuația

$$a_{11}x \cdot x_0 + a_{12}(xy_0 + x_0y) + a_{22}y \cdot y_0 + a_{10}(x+x_0) + a_{20}(y+y_0) + a_{00} = 0$$

Obs: Ec. tangentei la o conică într-un punct al său se obține prin dedublarea ec. conicei în punctul respectiv.
 Se poate demonstra și că ec. tangentei la o conică într-un punct al său se poate obține cu formula:

$$H_x(x_0, y_0)(x - x_0) + H_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

Exemple:

Fie $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ r.o.p. în (E, V, Φ) . În raport cu acest reper considerăm conicele date de ecuațiile:

$$\Gamma_1: 5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$$

$$\Gamma_2: 6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$$

$$\Gamma_3: 9x^2 - 6xy + y^2 + 20x = 0$$

$$\Gamma_4: x^2 - y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$$

- Determinați invariantii ortogonali ai lui Γ_i și justificați ce conică este.
- Determinați reperul canonic pt. fiecare conică în parte, inclusiv ecuațiile axelor coresp. reperului canonic și în raport cu R .
- Scrieți ecuațiile reduse ale conicilor și identificați elementele lor în raport cu reperul canonic, dar și în raport cu R . (Focus, vârfuri, excentricitate)
- Scrieți ecuațiile directoarei / directoarelor conicilor în raport cu R .
- Reprezentați grafic cele 2 repere R și reperul canonic, și conicele Γ_i , $i = \overline{1, 3}$.
- Determinați

i) ec. tang. la Γ_1 ce trece prin $M_1\left(\frac{10-6\sqrt{5}}{5}, \frac{15+3\sqrt{5}}{5}\right)_R$ în raport cu R .

ii) ec. tang. la Γ_2 ce trece prin $M_2\left(\frac{5}{2}, -1\right)_R$ în raport cu R .

iii) ec. tang. la Γ_3 ce trece prin $O(0,0)_R$ în raport cu R .

iv) ec. tang. la Γ_4 ce trece prin $M_3(3, 3+\sqrt{3})$ în raport cu R .

I

$$\Gamma_1: 5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$$

$$\Rightarrow \Gamma_1: {}^tXAX + {}^tBX + a_{00} = 0, \text{ unde}$$

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -16 \\ 2 & 8 & -28 \\ -16 & -28 & 80 \end{pmatrix}; \quad B = (-16 \quad -28); \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$a_{00} = 80$$

$$\delta = \det A = 40 - 4 = 36 > 0$$

$$\Delta = \det D = -1296 \neq 0$$

$$I = \text{tr} A = 13$$

$$I \cdot \Delta < 0$$

$\Rightarrow$ 17 este o elipsă

b) ① Det. valorile proprii ale lui A:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (5-\lambda)(8-\lambda) - 4 = 0$$

$$40 - 13\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0$$

$$\Delta = 169 - 4 \cdot 36$$

$$\Delta = 169 - 144$$

$$\Delta = 25$$

$$\lambda_1 = \frac{13-5}{2} = 4$$

$$\lambda_2 = \frac{13+5}{2} = 9$$

Valorile proprii ale lui A sânt: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 9$.

Obs: Notăm cu indicele "1" valoarea proprie cea mai mică (la elipsă)

② Det. vectorii proprii ai lui A cresp. vectorilor proprii $\lambda_1=4$ și $\lambda_2=9$

$$AU = \lambda U \Leftrightarrow (A - \lambda I_2)U = 0$$

① $\lambda_1=4$

$$(A - 4I_2)U = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right] U = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} U = 0$$

Not. $U = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \neq 0$ și obținem $\begin{cases} l + 2m = 0 \\ 2l + 4m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow l + 2m = 0$

$$\Leftrightarrow \underline{l = -2m} \Leftrightarrow \underline{U(4) = \{ \vec{u} = -2m\vec{i} + m\vec{j} \mid m \in \mathbb{R}^* \}}$$

Alegem un vector unitar din $U(4)$ pe care o să îl not. cu $\vec{i}'$.

Fie $\underline{m=1}$: $\vec{i}' = \frac{-2\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{4+1}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{i}' = \frac{\sqrt{5}}{5}(-2\vec{i} + \vec{j})}$

① $\lambda_2=9$

$$(A - 9I_2)U = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4l + 2m = 0 \\ 2l - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2l = m \Rightarrow$$

$$\underline{U(9) = \{ \vec{u} = l\vec{i} + 2l\vec{j} \mid l \in \mathbb{R}^* \}}$$

-C88-

Alegem un vector unitar din $\mathcal{U}(g)$ pe care o să îl not.
cu $\bar{f}$. a. i. $\{\tau, \bar{f}\}$ & $\{\tau', \bar{f}'\}$.

• Fie $\ell=1 \Rightarrow \bar{f}' = \frac{\tau+2\bar{f}}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \underline{\bar{f}' = \frac{\sqrt{5}}{5} (\tau+2\bar{f})}$

$$\{\tau, \bar{f}\} \xrightarrow{S} \{\tau', \bar{f}'\}$$

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \det S = -\frac{4 \cdot 5}{25} - \frac{5}{25} = -1 \Rightarrow \{\tau, \bar{f}\} \bar{o} \{\tau', \bar{f}'\}.$$

\(\Downarrow\)
această alegere
nu ne convine.

• Fie $\ell=-1 \Rightarrow \underline{\bar{f}' = \frac{\sqrt{5}}{5} (-\tau-2\bar{f})}$

$$\{\tau, \bar{f}\} \xrightarrow{S} \{\tau', \bar{f}'\}$$

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \det S = 1 > 0 \Rightarrow \{\tau, \bar{f}\} o \{\tau', \bar{f}'\}$$

această alegere ne convine.

$$\left[\text{Obs: } \lambda_1, \lambda_2 \text{ două valori proprii, } \underline{\tau \in \mathcal{U}(\lambda_1)}, \underline{\tau' = \lambda_1 \tau + \eta \bar{f}}. \right]$$

Atunci, $\underline{\bar{f}' = -\eta \tau + \lambda_2 \bar{f} \in \mathcal{U}(\lambda_2)}.$

③ Considerăm rotația de repere:

$$R = \{O; \tau, \bar{f}\} \mapsto R' = \{O; \tau', \bar{f}'\}$$

Această det. schimbarea de coord:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{5}}{5}(-2x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{5}}{5}(x' - 2y') \end{cases}$$

Im neuen Koordinatensystem R' , Γ_1 hat die Gleichung:

$$\Gamma_1: X' A' X' + 2 B' X' + a_0' = 0, \text{ wobei}$$

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}; B' = B \cdot S = (-16 \quad -28) \begin{pmatrix} \frac{-2\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{-2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} = \left(\frac{4\sqrt{5}}{5} \quad \frac{72\sqrt{5}}{5} \right), X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \quad a_0' = a_0 = 80$$

$$\text{Deshalb} \quad \Gamma_1: 4x'^2 + 9y'^2 + \frac{8\sqrt{5}}{5}x' + \frac{144\sqrt{5}}{5}y' + 80 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(x' + \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + 9\left(y' + \frac{8\sqrt{5}}{5}\right)^2 - \frac{4 \cdot 5 + 9 \cdot 64 \cdot 5}{25} + 80 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(x' + \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + 9\left(y' + \frac{8\sqrt{5}}{5}\right)^2 - \frac{4 \cdot 5 + 9 \cdot 5 \cdot 64 - 25 \cdot 80}{25} = 0$$

$= 36$

$$\Leftrightarrow 4\left(x' + \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + 9\left(y' + \frac{8\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 36 \quad | : 36$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x' + \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}{9} + \frac{\left(y' + \frac{8\sqrt{5}}{5}\right)^2}{4} = 1$$

④ Considerăm translația de repere:

$R' = \{O; \vec{i}', \vec{j}'\} \mapsto R'' = \{C; \vec{i}', \vec{j}'\}$
 care det. schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{\sqrt{5}}{5} \\ y'' = y' + \frac{8\sqrt{5}}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x'' - \frac{\sqrt{5}}{5} \\ y' = y'' - \frac{8\sqrt{5}}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=S' = I_2} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{8\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}}_{S_0'}$$

Deci $C(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{8\sqrt{5}}{5})_{R'}$.

În raport cu R'' , Γ_1 : $\frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{4} = 1 \Rightarrow R''$ este
 forma canonică

⌈ Rezumat:

① Det. valorile proprii ale lui A , not. cu $\lambda_1 \leq \lambda_2$.

② Det. vectorii proprii $\vec{i}', \vec{j}'$ coresp. val. proprii λ_1 și λ_2 ,
 $\{\vec{i}', \vec{j}'\}$ b.o.p.

③ Considerăm rotația de repere $R = \{O; \vec{i}, \vec{j}\} \mapsto R' = \{O; \vec{i}', \vec{j}'\}$

④ Considerăm translația de repere $R' = \{O; \vec{i}', \vec{j}'\} \mapsto R'' = \{C; \vec{i}', \vec{j}'\}$

✓

$$R \mapsto R' \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{5}}{5}(-2x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{5}}{5}(x' - 2y') \end{cases} \quad (1) \quad R' \mapsto R'' \Rightarrow \begin{cases} x' = x'' - \frac{\sqrt{5}}{5} \\ y' = y'' - \frac{8\sqrt{5}}{5} \end{cases} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(-2x'' + \frac{2\sqrt{5}}{5} - y'' + \frac{8\sqrt{5}}{5} \right) \\ y = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(x'' - \frac{\sqrt{5}}{5} - 2y'' + \frac{16\sqrt{5}}{5} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{5}}{5}(-2x'' - y'' + 2\sqrt{5}) \\ y = \frac{\sqrt{5}}{5}(x'' - 2y'' + 3\sqrt{5}) \end{cases} \quad (3)$$

$$R'' = \{C; \bar{x}', \bar{y}'\} \Rightarrow \begin{cases} Cx'' = Cx' = C + [\bar{x}'] \\ Cy'' = Cy' = C + [\bar{y}'] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{8\sqrt{5}}{5})_{R'} \\ C(2, 3)_R \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \bar{x}' = \frac{\sqrt{5}}{5}(-2\bar{x} + \bar{y}) \\ \bar{y}' = \frac{\sqrt{5}}{5}(-\bar{x} - 2\bar{y}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{Cx'' : \frac{x-2}{-2} = \frac{y-3}{1}}; \boxed{Cy'' : \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2}}$$

c) Ec. canonică a lui Γ_1 : $\frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{4} = 1$ în raport cu $R'' = \{C; \bar{x}', \bar{y}'\}$

Dei $a=3, b=2, a>b \Rightarrow$ Axa focală este Cx''

$$b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

$$\begin{array}{c|c} \text{Focus: } F(\sqrt{5}, 0)_{\mathcal{R}''} & F'(-\sqrt{5}, 0)_{\mathcal{R}''} \\ \Downarrow (3) & \Downarrow (3) \\ F(0, 4)_{\mathcal{R}} & F'(4, 2)_{\mathcal{R}} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{5}}{5}(-2x'' - y'' + 2\sqrt{5}) \\ y = \frac{\sqrt{5}}{5}(x'' - 2y'' + 3\sqrt{5}) \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c|c} \text{Vertex: } A(3, 0)_{\mathcal{R}''} & A'(-3, 0)_{\mathcal{R}''} \\ \Downarrow (3) & \Downarrow (3) \\ A\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}(\sqrt{5}-3), \frac{3\sqrt{5}}{5}(\sqrt{5}+1)\right)_{\mathcal{R}} & A'\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}(\sqrt{5}-3), \frac{3\sqrt{5}}{5}(\sqrt{5}-1)\right)_{\mathcal{R}} \\ \Downarrow & \Downarrow \\ A\left(\frac{10-6\sqrt{5}}{5}, \frac{15+3\sqrt{5}}{5}\right)_{\mathcal{R}} & A'\left(\frac{10-6\sqrt{5}}{5}, \frac{15-3\sqrt{5}}{5}\right)_{\mathcal{R}} \\ \\ B(0, 2)_{\mathcal{R}''} & B'(0, -2)_{\mathcal{R}''} \\ \Downarrow (3) & \Downarrow (3) \\ B\left(\frac{10-2\sqrt{5}}{5}, \frac{15-4\sqrt{5}}{5}\right)_{\mathcal{R}} & B'\left(\frac{10+2\sqrt{5}}{5}, \frac{15+4\sqrt{5}}{5}\right)_{\mathcal{R}} \end{array}$$

Excentricitate $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} < 1$

d) Directoarele: $d_{1,2}: x'' = \pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{9}{\sqrt{5}} \Rightarrow M\left(\frac{9}{\sqrt{5}}, 0\right)_{\mathcal{R}''} \in d_1, N\left(-\frac{9}{\sqrt{5}}, 0\right)_{\mathcal{R}''} \in d_2$

$M\left(\frac{9}{\sqrt{5}}, 0\right)_{\mathcal{R}''} \Rightarrow M\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{18}{\sqrt{5}} + 2\sqrt{5}\right), \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{9}{\sqrt{5}} + 3\sqrt{5}\right)\right)_{\mathcal{R}}$

$\Rightarrow M\left(\frac{-8}{5}, \frac{24}{5}\right)_{\mathcal{R}}$

$N\left(-\frac{9}{\sqrt{5}}, 0\right)_{\mathcal{R}''} \Rightarrow N\left(\frac{28}{5}, \frac{6}{5}\right)_{\mathcal{R}}$

$d_{1,2} \parallel Cy'' \Rightarrow \vec{d}_1 = \vec{d}_2 = [\vec{f}'] = \left[\frac{\sqrt{5}}{5}(-\vec{i}, -2\vec{j})\right] = [-\vec{i}, -2\vec{j}]$

-C93-

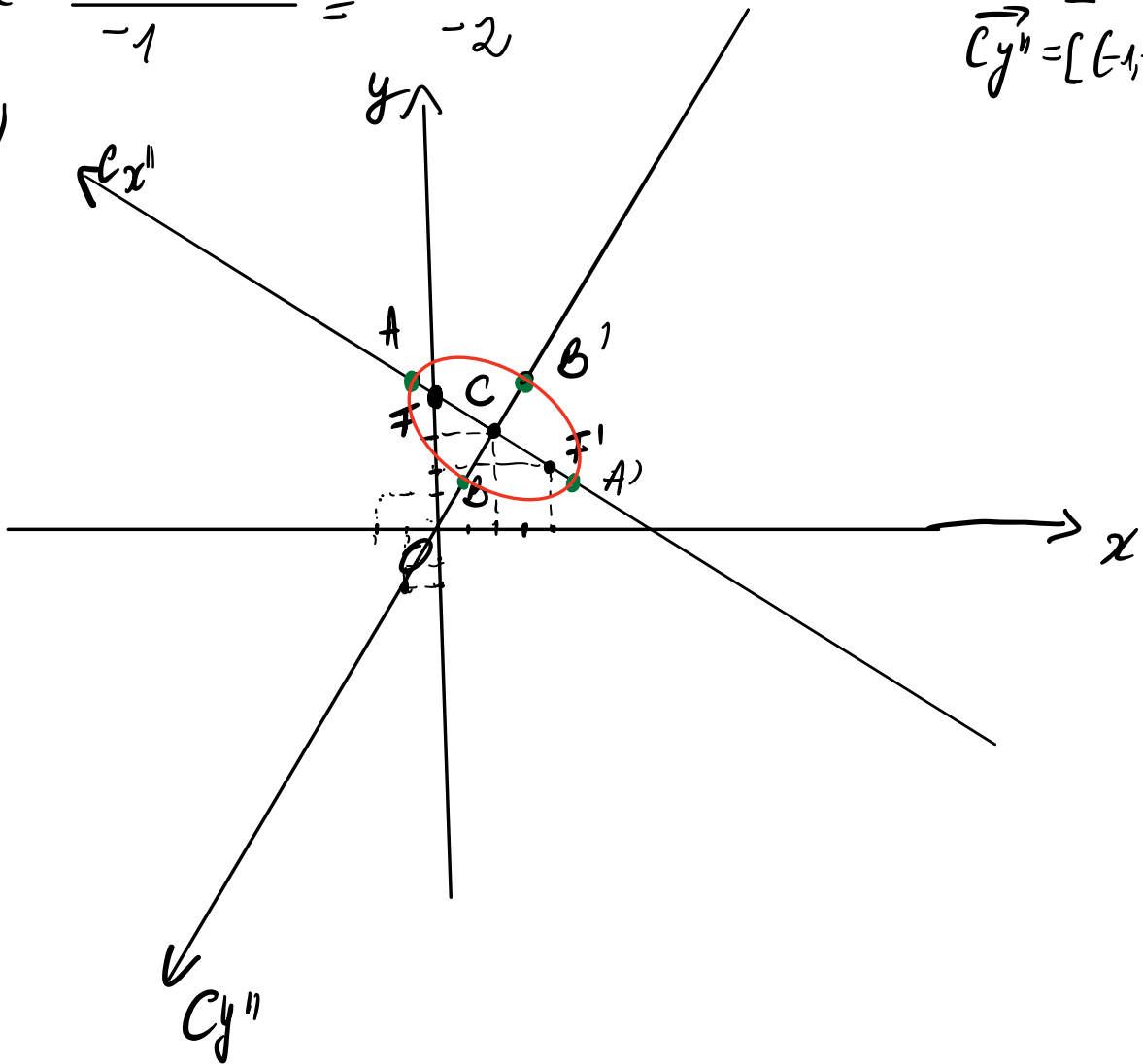
$$d_1: \frac{x + \frac{8}{5}}{-1} = \frac{y - \frac{24}{5}}{-2}$$

$$d_2: \frac{x - \frac{28}{5}}{-1} = \frac{y - \frac{6}{5}}{-2}$$

$$\vec{C}x'' = [-2, 1]$$

$$\vec{C}y'' = [-1, -2]$$

e)



4) $M_1(\frac{10-6\sqrt{5}}{5}, \frac{15+3\sqrt{5}}{5}) \in \Gamma_1$. Det. coord. lui M_1 în raport cu $\mathcal{R}''$.

În cazul nostru, obs. că $M_1 = A$, deci $M_1(3, 0)_{\mathcal{R}''}$.

Ec. tang. la Γ_1 în $M_1(3, 0) \in \Gamma_1$: $tg_1: \frac{3 \cdot x''}{9} + \frac{y'' \cdot 0}{4} = 1 \Rightarrow x'' = 3$

$tg_1 \parallel \vec{x}' \Rightarrow \vec{tg}_1 = \{(1, 2)_{\mathcal{R}''}\}$

$$tg_1: \frac{x - \frac{10-6\sqrt{5}}{5}}{1} = \frac{y - \frac{15+3\sqrt{5}}{5}}{2} \Rightarrow 2x - y - \frac{20-12\sqrt{5}}{5} + \frac{15+3\sqrt{5}}{5} = 0 \Rightarrow \underline{2x - y + 3\sqrt{5} - 1 = 0}$$

$$\text{II. } \Gamma_2: 6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$$

$$\hat{\mathbb{I}}^t X A X + 2BX + a_{00} = 0, \text{ unde}$$

$$a) A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}; B = (-6 \quad -13), \quad a_{00} = 11, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 3 & 8 & -13 \\ -6 & -13 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\delta = \det A = -9 < 0 \quad \Delta = \det Q = -81 \neq 0 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \delta \\ \Delta \end{matrix}} \right\} \Rightarrow \Gamma_2 \text{ este } \underline{\text{hiperbola}}$$

b) ① Det. valorii proprii ale lui A:

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 3 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda - 9)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 9 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

Obs. Not. cu λ_1 val. prop. pozitivă la hiperbolă)

② Det. vectorii proprii coresp. lui λ_1 și λ_2

$$A u = \lambda_1 u \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\ell \\ 9m \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m = 9\ell \\ 3\ell + 8m = 9m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 3\ell \\ 3\ell = m \end{cases} \Leftrightarrow m = 3\ell \quad \dots$$

$$U(\lambda_1) = U(9) = \{ \vec{v} = \ell \vec{i} + 3\ell \vec{j} \mid \ell \in \mathbb{R}^* \}$$

$$\text{Fie } \ell = 1 \text{ și } \underline{\vec{x}' = \frac{\vec{i} + 3\vec{j}}{\sqrt{10}}} \in U(9), \quad |\vec{x}'| = 1$$

$$AU = \lambda_2 U \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\ell \\ -m \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m = -\ell \\ 3\ell + 8m = -m \end{cases} \Leftrightarrow \underline{\ell = -3m}$$

$$U(-1) = \{ \bar{u} = -3m\bar{1} + m\bar{j} \mid m \in \mathbb{R}^* \}$$

$$\text{Fie } m = 1, \text{ și } \bar{j}' = \frac{-3\bar{1} + \bar{j}}{\sqrt{9+1}} = \underline{-\frac{3}{\sqrt{10}}\bar{1} + \frac{1}{\sqrt{10}}\bar{j}} \in U(-1), \quad |\bar{j}'| = 1.$$

$$\{\bar{1}, \bar{j}\} \xrightarrow{S} \{\bar{1}', \bar{j}'\}, \quad S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix}, \quad \det S = 1 > 0 \Rightarrow \{\bar{1}, \bar{j}\} \circ \{\bar{1}', \bar{j}'\}.$$

③ Considerăm rotația de reper

$$R = \{O; \bar{1}, \bar{j}\} \mapsto R' = \{O; \bar{1}', \bar{j}'\}$$

Acesta determină schimbarea de coordonate:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' - 3y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x' + y') \end{cases}$$

În raport cu R' , Γ_2 are ec:

$$\Gamma_2: {}^tX' \cdot A' \cdot X' + 2B'X' + a'_{00} = 0, \text{ unde}$$

$$A' = {}^tSAS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$B' = B \cdot S = (-6 \ -13) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix} = (-45/\sqrt{10} \quad 5/\sqrt{10})$$

$$a'_{00} = a_{00} = 11$$

$$\Gamma_2: 9x'^2 - y'^2 - 9\sqrt{10}x' + \sqrt{10}y' + 11 = 0$$

$$\Gamma_2: 9\left(x' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(y' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \frac{9 \cdot 10}{4} + \frac{10}{4} + 11 = 0$$

$$\Gamma_2: 9\left(x' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(y' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - 9 = 0 \quad / : 9$$

$$\Gamma_2: \left(x' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \frac{\left(y' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2}{9} - 1 = 0$$

④ Considerăm translația de repere

$$R' = \{O; \vec{i}, \vec{j}\} \mapsto R'' = \{C; \vec{i}', \vec{j}'\}$$

pt. care avem schimbarea de coordonate:

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{\sqrt{10}}{2} \\ y'' = y' - \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x'' + \frac{\sqrt{10}}{2} \\ y' = y'' + \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}\right)_{R'}$$

În raport cu R'' : $\Gamma_2: x''^2 - \frac{y''^2}{9} = 1 \rightarrow$ ec. canonică
 $\Rightarrow R''$ este reperul canonic.

$$R \mapsto R' \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' - 3y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x' + y') \end{cases} \quad (1) \quad ; \quad R' \mapsto R'' \Rightarrow \begin{cases} x' = x'' + \frac{\sqrt{10}}{2} \\ y' = y'' + \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Deci } R \mapsto R'' \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}}(x'' - 3y'' - \sqrt{10}) \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x'' + y'' + 2\sqrt{10}) \end{cases} \quad (3)$$

-C98-

$$C\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}\right)_{\mathcal{R}} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} C(-1, 2)_{\mathcal{R}} \quad \left. \begin{array}{l} Cx'' = C + [x'] = C + [(1, 3)_{\mathcal{R}}] \\ Cy'' = C + [y'] = C + [(-3, 1)_{\mathcal{R}}] \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} Cx'': \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{3} \\ Cy'': \frac{x+1}{-3} = \frac{y-2}{1} \end{cases}$$

$$c) \quad \Gamma_2: x''^2 - \frac{y''^2}{9} = 1$$

$$a=1$$

$$b=3$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 10 \Rightarrow c = \sqrt{10}$$

$$\cdot \text{Focusuri: } F(\sqrt{10}, 0)_{\mathcal{R}''}$$

$$F'(-\sqrt{10}, 0)_{\mathcal{R}''}$$

$$\mathbb{I}^{(3)}$$

$$\mathbb{I}^{(3)}$$

$$F(0, 5)_{\mathcal{R}}$$

$$F'(-2, -1)_{\mathcal{R}}$$

$$\cdot \text{Vârfuluri: } A(1, 0)_{\mathcal{R}''}$$

$$A'(-1, 0)_{\mathcal{R}''}$$

$$\mathbb{I}^{(3)}$$

$$\mathbb{I}^{(3)}$$

$$A\left(\frac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{10}}, \frac{3+2\sqrt{10}}{\sqrt{10}}\right)_{\mathcal{R}}$$

$$A'\left(\frac{-1-\sqrt{10}}{\sqrt{10}}, \frac{-3+2\sqrt{10}}{\sqrt{10}}\right)_{\mathcal{R}}$$

$$\cdot \text{Excentricitatea } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{1} > 1$$

$$\cdot \text{Asimptotele oblice:}$$

$$d_{1,2}: y'' = \pm \frac{b}{a} x'' \Leftrightarrow y'' = \pm 3x''$$

$$d_1: y'' = 3x'' \Leftrightarrow d_1: \begin{cases} x'' = t \\ y'' = 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{d}_1 = [x' + 3y'] \quad \int \Rightarrow$$

$$x' + 3y' = \frac{1}{\sqrt{10}} (t + 3\bar{j} + 3(-3t + \bar{j})) = \frac{1}{\sqrt{10}} (-8t + 6\bar{j})$$

-C99-

$$\Rightarrow \vec{d}_1 = [(-4, 3)_{\mathcal{R}}] \quad \left. \begin{array}{l} \\ C \in d_1, C(-1, 2)_{\mathcal{R}} \end{array} \right\} \Rightarrow d_1: \frac{x+1}{-4} = \frac{y-2}{3}$$

$$d_2: y'' = -3x'' \Rightarrow \vec{d}_2 = [x' - 3y'] = \left[\frac{1}{\sqrt{10}} (10\bar{i} + 0\bar{j}) \right] = [\bar{i}]$$

$$C \in d_2, C(-1, 2)_{\mathcal{R}} \Rightarrow \underline{d_2: y = 2}$$

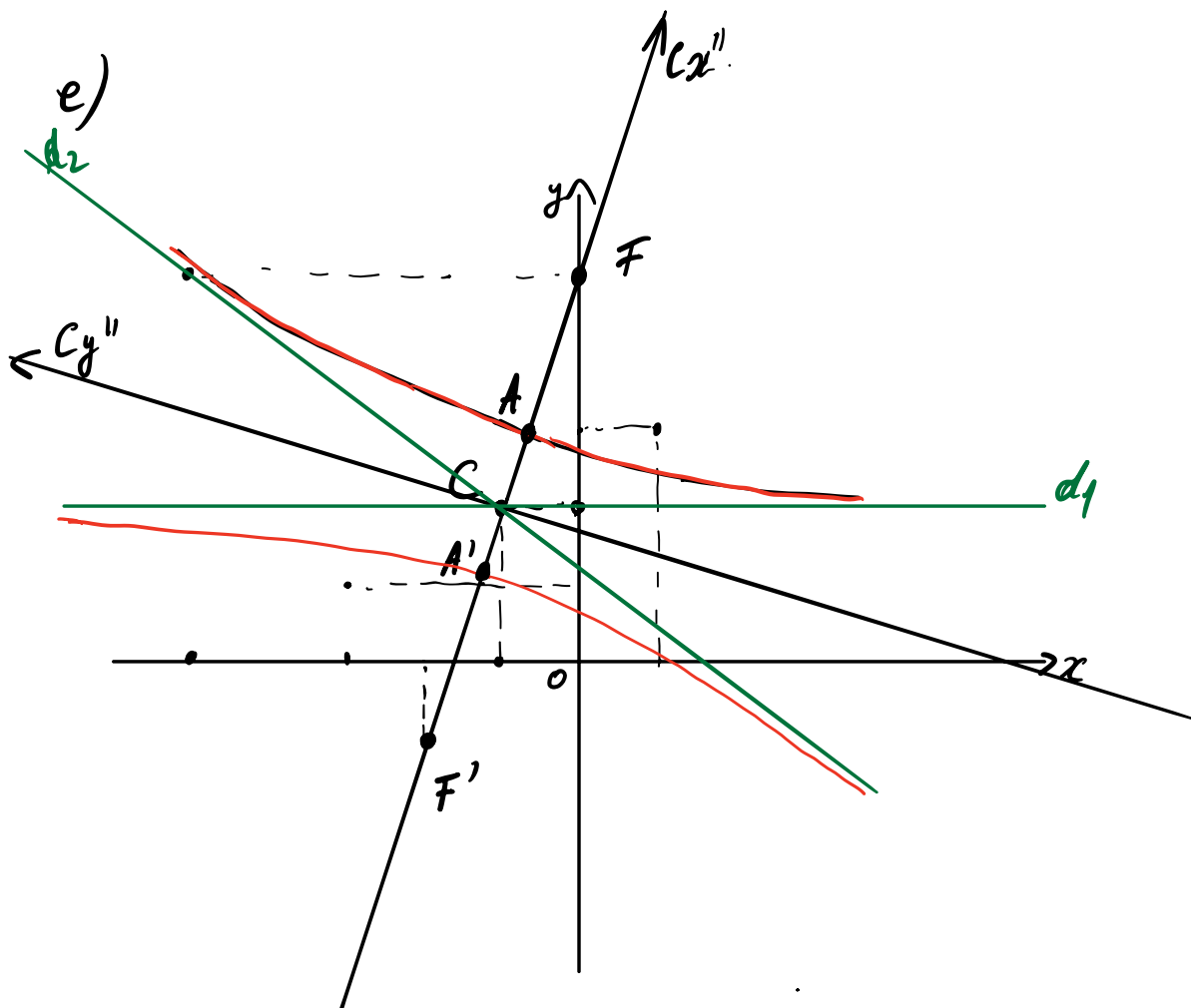
$$d) \text{ Directoarele: } d_{1,2}: x'' = \pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{1}{\sqrt{10}} = \pm \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$d_{1,2} \parallel \ell_{y''} \Rightarrow \vec{d}_1 = \vec{d}_2 = [(3, 1)_{\mathcal{R}}]$$

$$M\left(\frac{\sqrt{10}}{10}, 0\right)_{\mathcal{R}''} \in d_1 \Rightarrow M\left(\frac{1}{10} - 1, \frac{3}{10} + 2\right)_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow M\left(-\frac{9}{10}, \frac{23}{10}\right)_{\mathcal{R}}$$

$$N\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}, 0\right)_{\mathcal{R}''} \in d_2 \Rightarrow N\left(-\frac{11}{10}, \frac{17}{10}\right)_{\mathcal{R}}$$

$$d_1: \frac{x + \frac{9}{10}}{-3} = \frac{y - \frac{23}{10}}{1} ; \quad d_2: \frac{x + \frac{11}{10}}{-3} = \frac{y - \frac{17}{10}}{1}$$



f)

$$\Gamma_2: 6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$$

$M_2\left(\frac{5}{2}, -1\right) \in \Gamma_2 \Rightarrow$ ec. tang. la Γ_2 ce trece prin M_2 este

$$3\left(x \cdot (-1) + \frac{5}{2} \cdot y\right) + 8 \cdot y \cdot (-1) - 6\left(x + \frac{5}{2}\right) - 13(y - 1) + 11 = 0$$

$$(-3 - 6)x + \left(\frac{15}{2} - 8 - 13\right)y - 15 + 13 + 11 = 0$$

$$-9x - \frac{27}{2}y + 9 = 0$$

-C-101-

III. $\Gamma_3: 9x^2 - 6xy + y^2 + 20x = 0$

a) $\mathbb{I}^t X \cdot A \cdot X + 2BX + a_{00} = 0$, unde

$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 10 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $a_{00} = 0$

$D = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 10 \\ -3 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\delta = \det A = 9 - 9 = 0$
 $\Delta = \det D = 10(-10) = -100 \neq 0 \Rightarrow \Gamma_3: \text{parabola}$

6/

① Det. val. proprii ale lui A: $\det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow$

$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -3 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (9-\lambda)(1-\lambda) - 9 = 0$
 $9 - 10\lambda + \lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 10 \end{cases}$
 $\lambda(\lambda - 10) = 0$

Obs. Not. cu indice 1 val. proprie nulă (la parabola)

② Det. vect. proprii ai lui A coresp. lui $\lambda_1 = 0$ și $\lambda_2 = 10$

$\lambda_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -3l + m = 0 \Leftrightarrow m = 3l$
 $A \cdot u = \lambda u$

$U(0) = \{ \bar{u} = l\bar{i} + 3l\bar{j} \mid l \in \mathbb{R}^* \}$

$$\text{Fii } L=1 \Rightarrow \bar{x}' = \frac{\bar{x}+3\bar{y}}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}(\bar{x}+3\bar{y}) \in \mathcal{U}(0), |\bar{x}'|=1.$$

$$\text{Fii } \bar{y}' = \frac{1}{\sqrt{10}}(3\bar{x}+\bar{y}) \in \mathcal{U}(0), |\bar{y}'|=1, \bar{y}' \perp \bar{x}'$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \det S = 1 > 0 \Rightarrow \{\bar{x}', \bar{y}'\} \otimes \{\bar{x}, \bar{y}\}.$$

③ Considerăm rotația de reper

$$R = \{O; \bar{x}, \bar{y}\} \mapsto R' = \{O; \bar{x}', \bar{y}'\}$$

care det. schimbarea de coord.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' - 3y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x' + y') \end{cases}$$

În raport cu R' avem

$$\Gamma_3: {}^tX' A' X' + 2BX' + a_{00}' = 0,$$

unde

$$A' = {}^tS \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix};$$

$$B' = B \cdot S = \begin{pmatrix} 10 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{10} & -3\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

$$a_{00}' = a_{00} = 0, \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_3: 10y'^2 + 2\sqrt{10}x' - 6\sqrt{10}y' = 0$$

$$\Gamma_3: 10\left(y' - \frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 + 2\sqrt{10}x' - 10 \cdot \frac{9}{10} = 0$$

$$\Gamma_3: 10\left(y' - \frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 + 2\sqrt{10}x' - 9 = 0$$

$$\Gamma_3: 10\left(y' - \frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 + 2\sqrt{10}\left(x' - \frac{9}{2\sqrt{10}}\right) = 0 \quad / : 10$$

$$\Gamma_3: \left(y' - \frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 + \frac{2}{\sqrt{10}}\left(x' - \frac{9}{2\sqrt{10}}\right) = 0$$

④ Considerăm translația de repere

$$R' = \{O; \vec{i}', \vec{j}'\} \mapsto R'' = \{V; \vec{i}'', \vec{j}''\}$$

av. să avem schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{9}{2\sqrt{10}} \\ y'' = y' - \frac{3}{\sqrt{10}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x'' + \frac{9}{2\sqrt{10}} \\ y' = y'' + \frac{3}{\sqrt{10}} \end{cases} \Rightarrow V \begin{pmatrix} \frac{9}{2\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}_{R''}$$

În raport cu R'' avem:

$$\Gamma_3: y''^2 + \frac{2}{\sqrt{10}}x'' = 0 \Rightarrow y''^2 = -\frac{2}{\sqrt{10}}x'' \quad -C104-$$

⑤ Considerăm rotația de repere

$$R'' = \{V; \bar{x}', \bar{y}'\} \mapsto R''' = \{V; \bar{x}'', \bar{y}''\}$$

ai. să avem schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x'' = -x''' \\ y'' = -y''' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{x}'' = -\bar{x}' \\ \bar{y}'' = -\bar{y}' \end{cases}$$

În raport cu R''' avem:

$$\Gamma_3: y'''^2 = \frac{2}{\sqrt{10}} x''' \leadsto \text{ecuația canonică} \Rightarrow \underline{\Rightarrow R''' \text{ reperele canonic}}$$

$$\begin{array}{c} R \mapsto R' \\ \downarrow \\ \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}} (x' - 3y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}} (3x' + y') \end{cases} \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{c} R' \mapsto R'' \\ \downarrow \\ \begin{cases} x' = x'' + \frac{9}{2\sqrt{10}} \\ y' = y'' + \frac{3}{\sqrt{10}} \end{cases} \end{array} \quad (2)$$

$$\begin{array}{c} R'' \mapsto R''' \\ \downarrow \\ \begin{cases} x'' = -x''' \\ y'' = -y''' \end{cases} \end{array} \quad (3)$$

$$\text{Defi } R \mapsto R''' \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}} \left(-x''' + \frac{9}{2\sqrt{10}} + 3y''' - \frac{9}{\sqrt{10}} \right) \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}} \left(-3x''' + \frac{27}{2\sqrt{10}} - y''' + \frac{2}{\sqrt{10}} \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}} \left(-x''' + 3y''' - \frac{9}{2\sqrt{10}} \right) \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}} \left(-3x''' - y''' + \frac{33}{2\sqrt{10}} \right) \end{cases} \quad (4)$$

$$V(0,0)_{R'''} \Leftrightarrow V\left(-\frac{9}{20}, \frac{33}{20}\right)_R ; \quad -\frac{9}{20} \simeq -0.45$$

$$Vx''' = V + [\pi''] = V + [\pi'] = V + [(1,3)_R] \quad \frac{33}{20} \simeq 1.65$$

$$Vy''' = V + [\bar{y}''] = V + [\bar{y}'] = V + [(-3,1)_R]$$

$$Vx''': \frac{x + \frac{9}{20}}{1} = \frac{y - \frac{33}{20}}{3} ; \quad Vy''': \frac{x + \frac{9}{20}}{-3} = \frac{y - \frac{33}{20}}{1}$$

$$c) \Gamma_3: y'''^2 = \frac{2}{\sqrt{10}} x''' \Rightarrow \rho = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\text{Focoul: } F\left(\frac{1}{2\sqrt{10}}, 0\right)_{\mathcal{R}'''} \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)_{\mathcal{R}}$$

$$\text{Vârful: } V(0,0)_{\mathcal{R}'''} \Leftrightarrow V\left(-\frac{9}{20}, \frac{33}{20}\right)_{\mathcal{R}}$$

$$\text{Axa de simetrie este } Vx''': \frac{x + \frac{9}{20}}{1} = \frac{y - \frac{33}{20}}{3}$$

$$\text{Excentricitatea: } e = 1$$

$$d) \text{ Directoarea } \delta: x''' = -\frac{\rho}{2} \Leftrightarrow x''' = -\frac{1}{2\sqrt{10}}$$

$$\delta \parallel Vy''' \Rightarrow \vec{\delta} = [(-3, 1)_{\mathcal{R}}]$$

$$M\left(-\frac{1}{2\sqrt{10}}, 0\right)_{\mathcal{R}'''} \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} M\left(-\frac{2}{5}, \frac{23}{10}\right)_{\mathcal{R}} \in \delta$$

$$\delta: \frac{x + \frac{2}{5}}{-3} = \frac{y - \frac{23}{10}}{1}$$

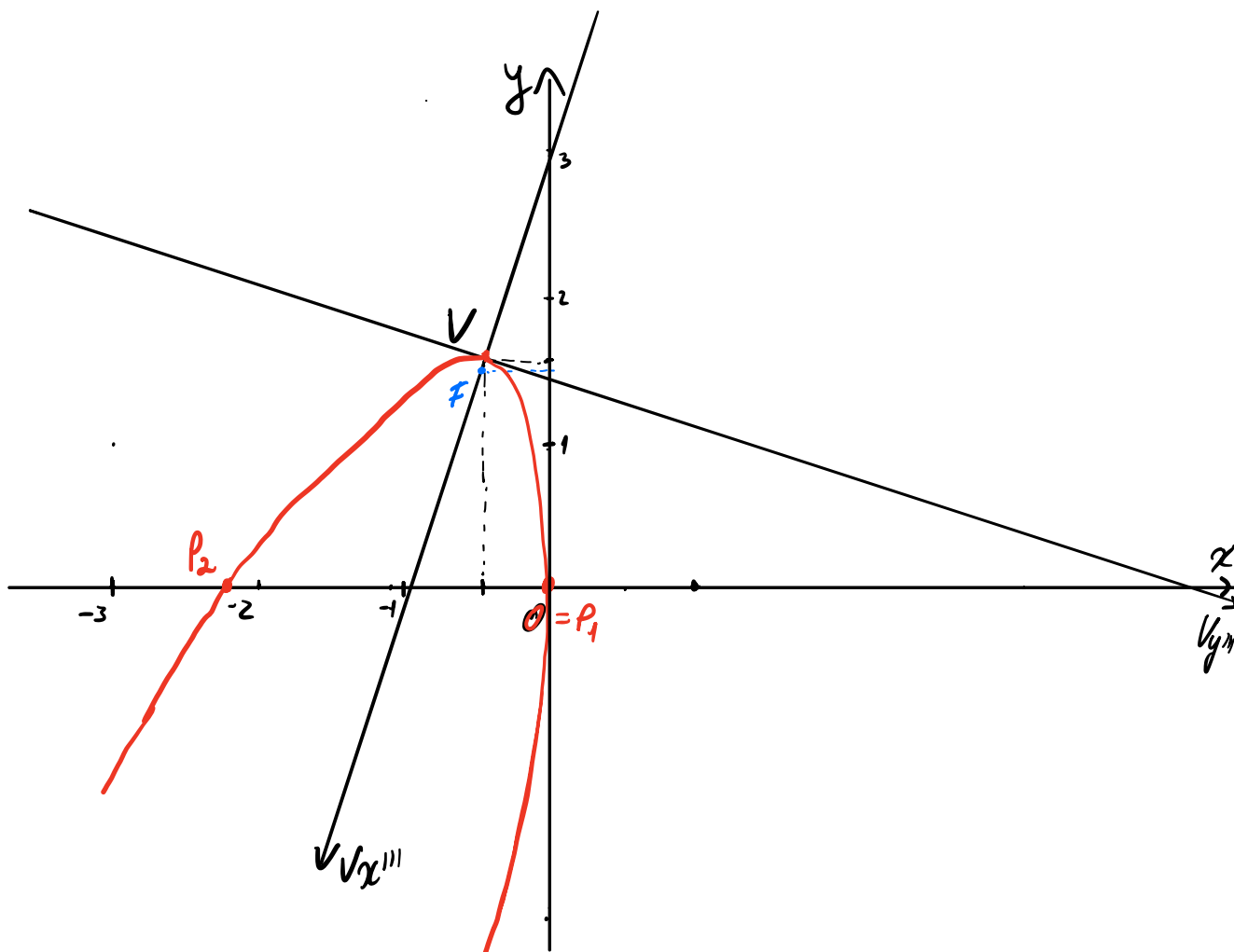
$$e) \Gamma_3: 9x^2 - 6xy + y^2 + 20x = 0$$

$$\Gamma_3 \cap Ox: 9x^2 + 20x = 0 \Leftrightarrow x(9x + 20) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} x_1 = 0 &\Rightarrow P_1(0, 0) \\ x_2 = -\frac{20}{9} &\Rightarrow P_2\left(-\frac{20}{9}, 0\right) \end{aligned}$$

$$\Gamma_3 \cap Ox = \{P_1, P_2\}$$

$$\Gamma_3 \cap Oy: y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow \Gamma_3 \cap Oy = \{P_1\}$$

$$\approx -2.22$$



$$f) \Gamma_3: 9x^2 - 6xy + y^2 + 20x = 0$$

$O(0,0)_R \in \Gamma_3 \Rightarrow$ ec. tang. la Γ_3 a trece prin $O(0,0) \in \Gamma_3$ în raport cu R este:

$$9(x \cdot 0) - 3(x \cdot 0 + 0 \cdot y) + y \cdot 0 + 10(x + 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{x=0}$$

$$\Gamma_4: x^2 - y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \delta = -1 < 0 \Rightarrow \text{tip hiperbolic}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \Delta = -2 \cdot (-2) - 3 \cdot 3 - 3 \cdot (-1) \\ = 4 - 9 + 3 \\ = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{nedegenerată}$$

$\Downarrow$

Γ_4 este o hiperbolă

$$\Gamma_4: (x-2)^2 - (y-3)^2 - 4 + 9 - 3 = 0$$

$$(x-2)^2 - (y-3)^2 + 2 = 0$$

Considerăm schimbarea de repere corect. schimbarea de coordonate:

$$\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$\mathcal{R} = \{O; \tau, \bar{\tau}\} \mapsto \mathcal{R}' = \{C; \tau, \bar{\tau}\}, \quad \underline{C(2, 3)_2}$$

-C109-

$$R' \leadsto \Gamma_1: x'^2 - y'^2 + 2 = 0 \quad / : (-2)$$

$$\frac{y'^2}{2} - \frac{x'^2}{2} = 1$$

Considerăm schimbare de repere care det. schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x'' = y' \\ y'' = x' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\det = -1$ (se schimbă orientarea)
 $\rightarrow$ nu îmi convine -

$$\begin{cases} x'' = y' \\ y'' = -x' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R' = \{C; \vec{x}, \vec{y}\} \mapsto R'' = \{C; \vec{x}', \vec{y}'\}$$

$$\begin{cases} \vec{x}' = \vec{y} \\ \vec{y}' = -\vec{x} \end{cases}$$

$$R'' \leadsto \Gamma_1: \frac{x''^2}{2} - \frac{y''^2}{2} = 1 \leadsto \text{ec. canonică}$$

Axa focală: Cx''

$$a = b = 2, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{2}$$

-C110-

$$Cx'': \begin{cases} C(2,3)_{\mathcal{R}} \\ x' = \bar{y} \end{cases} \Rightarrow Cx'': \frac{x-2}{0} = \frac{y-3}{1}$$

$$Cy'': \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{0}$$

• Vertikale: $A(2,0)_{\mathcal{R}''}$, $A'(-2,0)_{\mathcal{R}''}$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & & \Downarrow \\ A(0,2)_{\mathcal{R}'} & & A'(0,-2)_{\mathcal{R}'} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ A(2,5)_{\mathcal{R}} & & A'(2,1)_{\mathcal{R}} \end{array}$$

• Asymptote oblique: $y'' = \pm \frac{b}{a} x'' \Leftrightarrow y'' = \pm x'' \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -x' = \pm y' \Leftrightarrow -(x-2) = \pm (y-3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x+2 = \pm(y-3)$$

$$-x+2 = y-3$$

$\Downarrow$

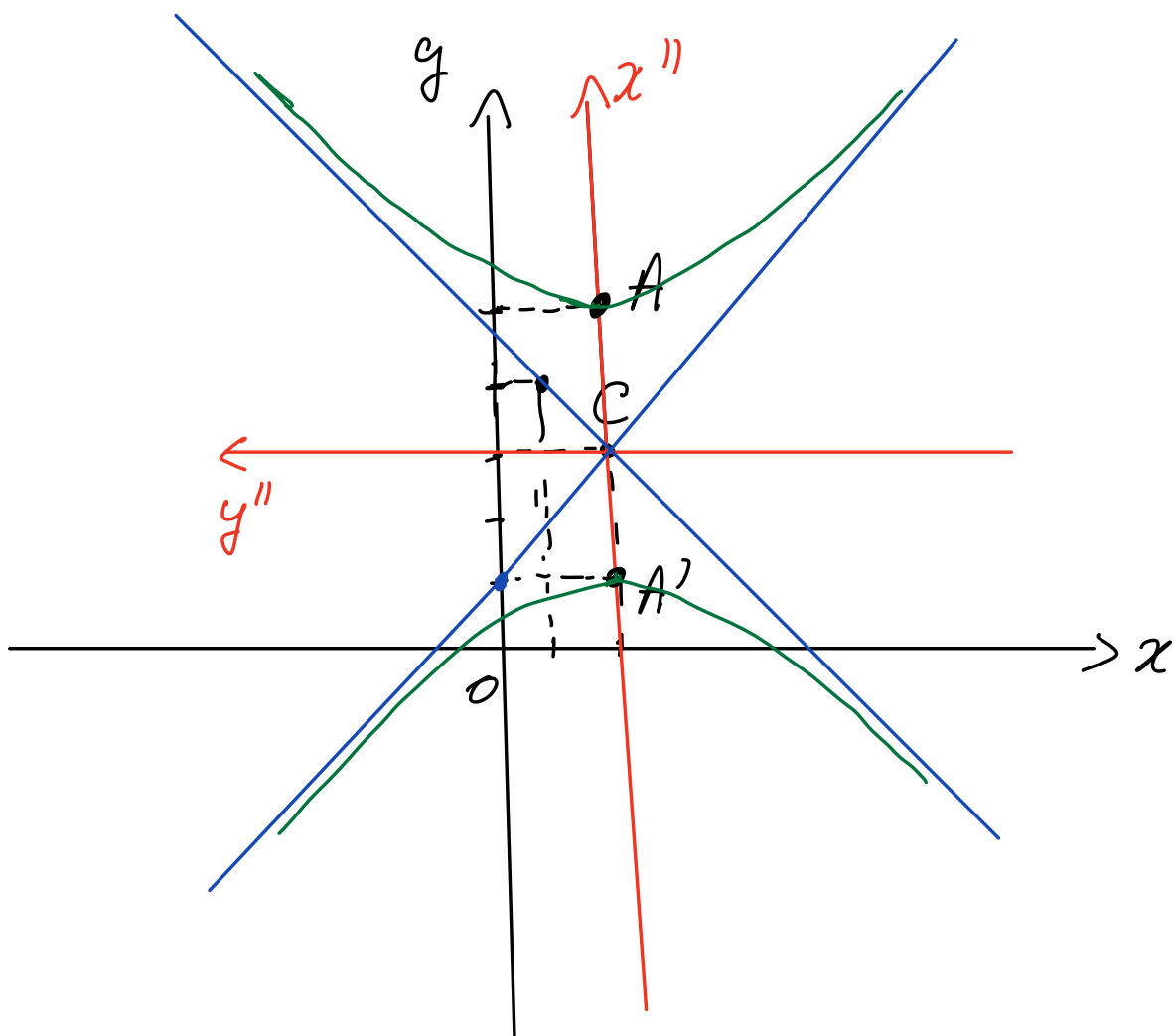
$$\underline{y+x-5=0}$$

$$-x+2 = -y+3$$

$\Downarrow$

$$\underline{x-y+1=0}$$

-CH1-



...